

# Estimation of Regime-Switching Continuous-Time Stochastic Volatility Models Using KOSPI 200

Seungmoon Choi\*

**Abstract** This article estimates regime-switching continuous-time stochastic volatility models using daily KOSPI 200. We consider single regime Heston, GARCH, and CEV stochastic volatility models and 6 regime-switching stochastic volatility models which have two different regimes  $L$  and  $H$ . We employ Hamilton algorithm (Hamilton (1989)) to compute the log-likelihood and to apply MLE. Because the true transition probability density functions (TPDFs) of our stochastic volatility models are unknown, we use Aït-Sahalia (2008) and Choi (2015b) to obtain closed-form approximate TPDF. The regime-switching CEV model where the transition probability is allowed to vary over time has been found to be the best to explain the movements of KOSPI 200. Regime  $L$  has a stronger leverage effect than regime  $H$ . Comparing to regime  $L$ , the volatility variable tends to revert to its long-run mean level more rapidly, the volatility of volatility variable is greater, the probability of staying in the same regime  $H$  in the next period is bigger in regime  $H$ . And the transition probability varies with time depending on the stock price rather than the volatility. When the probabilities of regime  $H$  are high we could identify various economic and political events between South Korea and North Korea or inside or outside South Korea that could have affected Korean stock market.

**Keywords** KOSPI 200, Continuous-Time Stochastic Volatility Model, Regime-Switching, Maximum Likelihood Estimation

**JEL Classification** C22, C51, C58

---

\*Associate Professor, School of Economics, University of Seoul (E-mail: schoi22@uos.ac.kr, Tel: 02-6490-2071) This work was supported by the 2018 Research Fund of the University of Seoul.

## KOSPI 200을 이용한 국면전환 연속시간 확률 변동성 모형의 추정

최승문\*

**Abstract** 이 논문에서는 KOSPI 200 일별 자료를 이용해 국면전환 (regime-switching) 연속시간 (continuous-time) 확률 변동성 (stochastic volatility) 모형들을 추정한다. 단일국면 Heston, GARCH, 그리고 CEV 확률 변동성 모형들과 두 가지 다른 국면  $L$ 과  $H$ 이 있는 6개의 국면전환 확률 변동성 모형들을 고려한다. 추정 방법은 해밀턴 알고리즘 (Hamilton (1989))을 이용해 우도 함수의 값을 계산하고 최우 추정법을 이용한다. 우리의 확률 변동성 모형들의 전이 확률밀도 함수들을 알지 못하기에 Aït-Sahalia (2008)와 Choi (2015b)를 이용해 근사적이고 구체적인 식으로 구한다. 전이 확률이 시간에 따라 변하는 경우의 국면전환 CEV 모형이 KOSPI 200 자료를 가장 잘 설명한다는 추정 결과를 얻었다.  $L$ 국면이  $H$ 국면보다 레버리지 효과가 더 컸다. 그리고 국면  $L$ 과 비교해 국면  $H$ 에서 변동성 변수가 장기적인 평균 수준으로 더 빨리 돌아오는 경향이 있었고, 변동성 변수의 변동성도 더 컸으며, 국면  $H$ 에 있을 때 다음 기에 같은 국면에 있을 확률이 더 컸고, 전이확률이 변동성 변수 보다는 주가에 의존하며 시간에 따라 변한다는 결과를 얻었다. 국면  $H$ 에 있을 확률이 높았던 시기에는 남북 관계나 대내외적으로 한국 주식 시장에 영향을 줄 수 있는 정치, 경제적인 여러 사건들이 있는 경우가 많았다.

**Keywords** KOSPI 200, 연속시간 확률 변동성 모형, 국면전환, 최우 추정

**JEL Classification** C22, C51, C58

---

\*서울시립대학교 경제학부 부교수 (E-mail: schoi22@uos.ac.kr, Tel: 02-6490-2071) 이 논문은 2018년도 서울시립대학교 교내학술연구비에 의하여 지원되었음.

## 1. 서론

Black and Scholes (1973)와 Merton (1973)은 자산 가격의 움직임이 연속 시간 확산(continuous time diffusion) 모형의 하나인 기하적 브라운운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 가정을 하고 자산에 대한 유럽식 옵션(European option)의 가격 공식을 구체적으로 구했다. 그런데 이들이 사용한 모형은 자산 수익률(asset returns)이 정규분포를 따르고 자산 가격의 변동성(volatility)이 고정되어있다는 것을 의미한다. 그렇지만 여러 자산 수익률들의 분포를 살펴보면 꼬리부분이 정규분포보다 더 두껍고, 자산 가격의 변동성이 시간에 따라 달라지며, 자산 수익률과 변동성의 변화 사이에 음의 상관관계가 있다는 지렛대 효과(leverage effect) 등이 잘 알려져 있다. 또한 옵션 가격의 내재적 변동성(implied volatility)이 시간, 행사가격(strike price), 그리고 만기까지의 시간 등에 따라 달라지는 현상도 기하적 브라운운동 모형으로는 설명할 수 없다(Stein (1989) 그리고 Ait-Sahalia and Lo (1998)). 그래서 이러한 문제들을 해결하기 위해 Hull and White (1987), Stein and Stein (1991), Heston (1993), 그리고 Lewis (2000) 등은 다양한 형태의 연속시간 확률 변동성 모형(stochastic volatility model)들을 제안했다. 이 논문들은 주로 재무이론을 개발하고 설명하기 위한 것들이고 확률 변동성 모형이 실제 자산가격의 움직임을 얼마나 잘 설명하는지에 대한 실증 연구들은 1990년대 후반에 연속시간 확산과정(diffusion process)을 추정하기 위한 계량경제학적 방법론과 이론들이 개발되기 시작하면서 이루어지기 시작했다. 확률 변동성 모형들을 실제 데이터에 적용해 추정한 예를 들면, Jones (2003)는 베이지언 방법론으로 S&P 100 주가지수를 이용해 확률 변동성 모형들을 추정했고 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)는 최우 추정법으로 S&P 500 주가지수를 이용해 연속시간 확률 변동성 모형들을 추정했다. Choi (2018)은 확률 변동성 모형을 이용해 한국과 미국의 주식 시장을 비교했다.

이 논문에서는 확률 변동성 모형을 일반화해 경제 상황에 따라 두 가지 다른 확률 변동성 모형이 데이터를 설명할 수 있는 국면전환(regime switching) 확률 변동성 모형을 KOSPI 200에 적용해 추정한 후 어떤 모형이 한국의 주가지수의 움직임을 잘 설명할 수 있는지 알아보기 위한 것이다. 본 연구자가 아는 한 국면전환을 연속시간 확률적 변동성 모형에 결합한 기존의 연구는 많지 않다. 수리적 재무이론에서 Elliott, Siu and Chan (2007)은 국면전환 Heston 모형을 이용해 변동성 스왑의 가격을 계산했지만 이들은 국면을 결정하는 변수가 주가나 변동성과 독립이라는 다소 강한 가정을 했다. Choi and Yuan (2018)은 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)을 일반화해 국면전환 확률 변동성 모형을 S&P

500 주가지수에 적용해 추정했다. Durham and Park (2013)은 우리가 고려하는 것과 다른 형태의 확률 변동성 모형의 일부 모수들이 국면에 따라 달라질 수 있다는 국면전환 확률 변동성 모형을 이용해 국면전환 모형이 주가의 비대칭도와 첨도를 더 잘 설명한다는 것을 보였다. 그렇지만 이들은 국면전환 모형을 추정할 때 연속시간 모형을 이산화(discretize)한 다음에 모수들을 최우 추정법으로 얻었다. Lo(1988)는 연속시간 모형인 확산과정을 이산화해 추정하면 추정치가 편향된다는 사실을 지적했다. 우리는 확산과정을 이산화하지 않기 때문에 이런 추정치의 편향성에 대한 염려를 하지 않아도 되며 여러 다양한 확률적 변동성 모형을 고려하고 이 모형들의 일부가 아닌 모든 모수들이 경제 상태에 따라 달라질 수 있다는 더 일반적인 상황을 고려하고 있다. 이 논문의 연구와 관련된 논문으로 단기 이자율을 분석하기 위해 확산과정 모형에 국면전환을 결합한 연구들이 있다. 몇 가지 예를 들면, Naik and Lee (1998)는 Vasicek 모형에, Liechty and Roberts (2001)는 가우시안 (Gaussian) 확산과정 모형에, Driffill et al. (2009)은 CIR 모형에 그리고 Choi (2009)는 이들 모형을 모두 포함하는 일반적인 확산과정 모형에 국면전환을 결합해 단기 이자율의 움직임을 설명했다.

우리는 국면전환 확률 변동성 모형을 추정하기 위해 최우 추정법을 사용한다. 그러기 위해서는 우도함수의 값을 계산해야 하는데, 해밀턴 알고리즘을 이용해 우도함수의 값을 계산하고 이 과정에서 각 시점이 어느 국면에 있는지 확률을 계산할 수 있다. 그런데 이렇게 우도함수를 계산하기 위해서는 각 국면에서 확률 변동성 모형의 전이 확률밀도 함수 (transition probability density function)를 알아야 한다. 확산과정의 전이 확률밀도 함수는 일반적으로 알려져 있지 않다. 단일 변수 확산과정 모형이라고 하더라도 기하적 브라운운동 모형, Vasicek 모형, CIR 모형 등 몇 가지를 제외하고는 전이 확률밀도 함수는 알지 못한다. 우리가 고려하는 모형들은 2변수 확산과정으로 이들에 대한 전이 확률밀도 함수도 알려져 있지 않다. 다행히도 Ait-Sahalia (2008)는 다변수 시간균질 (time-homogeneous) 확산과정의 로그-전이 확률밀도 함수를 구체적인 식으로 근사시키는 방법과 이론을 개발했다. 이와 관련된 선행 연구들을 보면, Ait-Sahalia (2002)에서 먼저 단일변수 시간균질 확산과정 모형의 근사적 전이 확률밀도 함수를 구하는 방법을 제시했고, 이는 Egorov, Li, and Xu (2003)에 의해 단일변수 시간비균질 (time-inhomogeneous) 확산과정의 근사적 전이 확률밀도 함수를 구하는 방법으로, Ait-Sahalia (2008)에서 다변수 시간균질 확산과정의 로그-전이 확률밀도 함수를 구하는 방법으로, Yu (2007)에서 다변수 시간균질 점프 확산과정의 근사적 전이 확률밀도 함수를 구하는 방법으로, 그리고 Choi (2013, 2015a, 2015b)에서는 각각 다변수 시간비균질

확산과정의 로그-전이 확률밀도 함수, 전이 확률밀도 함수, 다변수 시간비균질 점프 확산과정의 근사적 전이 확률밀도 함수를 구하는 방법으로 일반화 됐다. 이 논문에서 다루는 모든 확률 변동성 모형들은 2변수 시간균질 확산과정으로 Ait-Sahalia (2008) 방법론을 이용해 이들의 근사적 로그-전이 확률밀도 함수를 구하고 Choi (2015b)의 결과를 이용해 근사적 전이 확률밀도 함수를 구한 후에 해밀턴 알고리즘을 이용해 우도함수의 값을 계산한다.

이 연구에서는 Heston, GARCH, 그리고 CEV 연속시간 확률 변동성 모형에 국면전환을 결합해 모두 9개의 모형들을 2009년 4월 13일부터 2018년 7월 11일까지 일별 KOSPI 200과 VKOSPI 자료를 이용해 추정한다. 먼저 세 가지 종류의 단일국면 확률 변동성 모형들을 추정할 것이며 CEV 모형은 나머지 두 모형을 포함한다. 그리고 각 확률 변동성 모형에 국면전환을 결합해 경제 상태에 따라 서로 다른 두 가지 국면  $L$ 과  $H$ 가 존재하는 국면전환 확률 변동성 모형을 고려한다. 국면을 나타내는 변수는 연속시간 1차 마르코프 연쇄를 따르는데 이때 전이확률이 시간에 따라 고정되어 있는 경우와 주가와 변동성 변수에 의존해 시간에 따라 달라질 수 있는 두 가지 다른 모형을 추정하므로 각 확률 변동성 모형에 국면전환을 결합한 경우가 2가지로 모두 9개의 모형을 추정하는 것이다. 일별 KOSPI 200 자료는 로그 변환을 하고 VKOSPI 자료를 이용해 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)의 제안에 따라 관측가능하지 않은 변동성 변수의 대리변수를 만들어 추정에 사용한다. 이렇게 함으로써 KOSPI 200이 경제 상황에 따라 서로 다른 확률 변동성 모형을 따르게 되는지 데이터가 직접 말을 할 수 있도록 할 것이다.

모형의 추정결과 각각의 확률 변동성 모형에서 단일 국면 모형에 비해 국면 전환 모형의 최우도가 매우 크게 증가하는 것을 알 수 있었다. 그리고 전이 확률이 시간에 따라 고정된 국면전환 모형이 전이확률이 주가와 변동성 변수에 의존하는 국면전환 모형에 의해 매우 강하게 통계적으로 기각됨을 알 수 있었다. 단일국면 가정에서 추가적인 국면의 모수들을 식별할 수 없는 잘 알려진 문제 때문에 통상적인 우도비 검정 같은 방법으로 국면전환 모형이 단일 국면보다 더 나은지 통계적 검정을 할 수는 없지만 AIC나 BIC와 같은 정보 기준을 이용하면 나머지 모형들을 모두 포함하는, 시간에 따라 전이확률이 변하는 국면전환 CEV 모형이 가장 선호됨을 알 수 있었다. 이 모형을 중심으로 모수들의 추정 결과를 간단히 설명하면, 두 국면 모두에서 레버리지 효과가 강하게 있으며  $L$  국면에서 더 강한 레버리지 효과를 확인할 수 있었다. 변동성 변수는 두 국면에서 장기적인 다른 두 개의 값으로 국면  $H$ 에서 더 강하게 더 큰 값으로 회귀하는 것을 알 수 있었다. 변동성 변수의 변동성 함수와 관련된 모수들도 통계적으로 아주 유의하게 추정됐고 국면  $H$ 에서 더 높은 변동성을

보였는데 변동성 변수에 대한 변동성의 변동성의 탄력성은 국면  $L$ 에서 더 컸다. 국면전환 Heston모형도 국면전환 CEV의 경우와 질적으로 비슷한 결과를 보였으나 세 모형들 중 가장 열등한 국면전환 GARCH 모형에서는 다른 두 모형들과 비교해 비슷하거나 상반된 뒤섞인 결과를 얻었다. 국면을 결정하는 변수의 전이확률은 국면  $H$ 에서 다음 시점에도 같은 국면에 있을 확률이 높게 추정됐고 반면에 국면  $L$ 에서 다음 시점에도 같은 국면에 머물 확률은 작은 값으로 추정됐다. 이는 국면전환 Heston 모형에서도 비슷했지만 국면전환 GARCH 모형에서는 반대로 국면  $H$ 에서 다음 시점에도 같은 국면일 확률은 작고  $L$ 국면에서 다음 기에 같은 국면에 머물 확률은 큰 값을 얻었다. 전이 확률이 시간에 따라 변하는 경우에도 비슷한 결과를 얻었는데 주로 국면  $H$ 와 관련된 모수들이 통계적으로 유의하게 추정됐고 전이확률이 변동성 변수 보다는 주가에 의존한다는 결과를 얻었다. 마지막으로 추정과정에서 각 시점에서 경제가 두 국면들 중 어느 국면에 있는지 확률을 계산할 수 있는데 국면  $H$ 에 있을 확률이 높았던 기간에는 남북관계나 대내외적으로 한국 주식 시장에 영향을 줄 수 있는 정치 경제적인 특별한 사건들이 있었던 경우가 많았다.

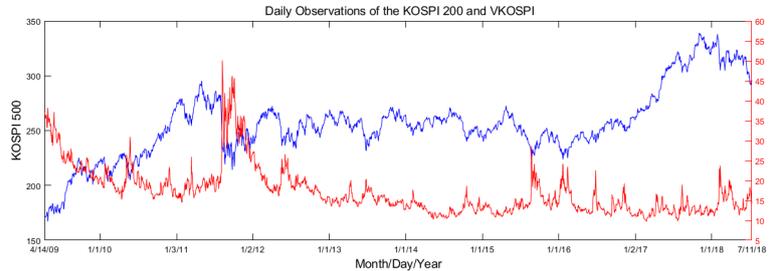
이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 연구에서 사용한 자료들을 구체적으로 설명하고 관측가능하지 않은 주가의 변동성 변수를 VKOSPI 자료로부터 어떻게 만들었는지 설명을 하면서 연구의 동기에 대해서 설명한다. 다음 절에서는 우리가 고려하는 단일국면과 국면전환 확률 변동성 모형들을 소개한다. 최우 추정법을 이용해 모형을 추정할 때 우도 함수의 값을 해밀턴 알고리즘을 이용해 계산하는 방법과 이 과정에서 필요한 확률 변동성 모형의 전이 확률밀도 함수를 근사적이고 구체적인 식으로 어떻게 구하는지에 대한 내용은 4절에 있다. 5절에서 추정 결과에 대한 자세한 설명과 논의를 한 후에 6절에서 결론으로 마무리를 한다.

## 2. 데이터 및 연구동기

그림 1은 KOSPI 200 주가 지수와 이의 변동성 지수인 VKOSPI의 일별 자료다. KOSPI 200 자료는 1990년 1월 3일부터 만들어지기 시작하기는 했지만 VKOSPI 자료는 2009년 4월 13일부터 발표되기 시작했기 때문에 본 연구에서 사용하는 자료의 시작일은 2009년 4월 13일이다. 이 연구를 시작했을 때 이 자료들이 2018년 7월 11일까지 있었기에 당시에 사용 가능한 모든 자료들을 데이터스트림(Datastream)에서 받아 이용했다. KOSPI 200 주가 지수는 한국에 있는 200개 큰 기업들의 주식의 현재 시장가치로 계산되는데 1990년 1월 3일의 시장가치를 100이라는 기준 값으로 해 계산된 것이다. KOSPI 200 에 포

합된 주식들의 전체 가치는 KOSPI에서 거래되는 모든 주식들의 가치의 70%가 넘는 값으로 한국 주식 시장의 움직임을 잘 설명하는 지수라 할 수 있다. VKOSPI는 시장에서 거래되는 KOSPI 200 지수에 대한 여러 종류의 30일 만기 유럽식 콜과 풋 옵션들을 이용해 계산된 KOSPI 200 지수의 내재적 변동성(implied volatility) 지수로 미국의 S&P 500 주가지수의 내재적 변동성인 VIX를 계산하는 것과 비슷한 방식으로 계산되어 한국거래소에서 2009년 4월 13일 부터 발표하기 시작했다. VKOSPI에 대한 좀 더 자세한 설명은 Choi and Han (2009)에 있다.

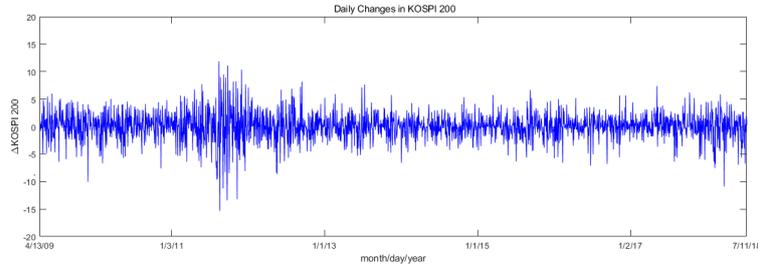
그림 1: 일별 KOSPI 200과 VKOSPI (2009년 4월 13일 - 2018년 7월 11일)



주: 그림 1에는 2009년 4월 13일부터 2018년 7월 11일 까지의 일별 KOSPI 200과 VKOSPI 시계열 자료들의 그래프가 그려져 있다.

그림 1에서 볼 수 있듯이 주가의 변동성이 시간에 따라 변하며 주가가 떨어질 때 변동성이 더 커지는 지렛대 효과도 확인할 수 있다. Stein and Stein (1991) 그리고 Heston (1993) 등은 여러 자산 가격들에서 관찰할 수 있는 이러한 현상들을 Black-Scholes-Merton 모형보다는 확률적 변동성 모형들이 더 잘 설명 할 수 있다는 것을 보였다. 그렇지만 예를 들면 미국의 신용등급 강등으로 인해 2011년 8월에 있었던 KOSPI 200의 급락과 같은 경제적 상황에서도 주가나 이의 변동성이 다른 시기와 마찬가지로 한 가지의 데이터 생성 과정을 따른다고 생각하기는 어려워 보인다. 그림 1을 육안으로 살펴보면 레버리지 효과가 위에서 말한 주가 급락의 시기에 그리고 변동성이 클수록 더 강하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 또한 변동성의 장기적 평균 수준이나 이 수준으로 돌아오는 속도 또한 경제적 상황에 따라 다르게 보인다. 그림 2와 3은 KOSPI 200 주가지수와 VKOSPI의 일별 변화를 나타낸 것이다. 두 변수 모두에 대해 변동성 클러스터링 (clustering) 현상을 확인할 수 있고 VKOSPI의 변동성도 시기에 따라 다른 것을 확인할 수 있다. KOSPI 200의 변동성이 시간에 따라 변하는 것이나 클러스터링을 보이는 것은 확률 변동성 모형의 두 번째 변수

그림 2: KOSPI200의 일별 변화 (2009년 4월 13일 - 2018년 7월 11일)

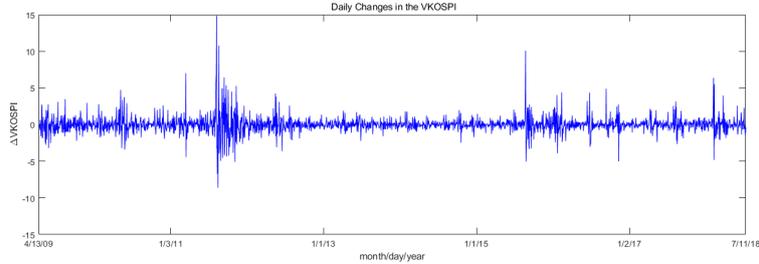


주: 그림 2에는 2009년 4월 13일부터 2018년 7월 11일 까지 KOSPI 200의 일별 변화의 시계열 자료를 그림 2에 그렸다.

인 변동성 변수로 설명될 수도 있겠으나, 그림 1에서 변동성 변수의 움직임을 보면 이 변수 자체가 장기적인 평균 수준으로 회귀하는 모습이 보이는데, 이 장기적인 평균 값이 대략적으로 2014년 이전과 이후에 다른 값을 갖는 것 처럼 보이고 이들 값으로 회귀하는 속도 또한 다르게 보인다. 단일국면 확률 변동성 모형은 이러한 데이터의 특성들을 설명하기에 부족하다. 주가 뿐만 아니라 다른 여러 자산 가격들에서도 보이는 이러한 현상들을 더 정확하게 확인하고 설명할 수 있는 모형을 찾는 것이 필요하고 또 아주 중요하다고 할 수 있다. 따라서 이 논문에서는 국면전환과 확률 변동성 모형을 결합해 경제의 상태에 따라 확률 변동성 모형의 모수들이 서로 다른 값을 가질 수 있도록 해 데이터를 생성하는 과정이 다를 수 있도록 하는 더 일반적인 모형을 고려한다. 이 모형을 데이터에 적용해 엄밀한 방식으로 추정하고 통계적인 분석과 경제적 해석을 통해 데이터가 추가적인 국면의 존재 여부를 말할 수 있도록 할 것이다. 아래에서 좀 더 자세히 살펴보겠지만, 우리가 고려하는 모형들은 Heston, GARCH, 그리고 CEV 확률 변동성 모형의 모수들이 경제적인 상황에 따라 서로 다른 두 가지 값을 가질 수 있도록 하는 국면전환 확률 변동성 모형들이다. 그래서 실제 데이터를 이용해 이 모형들의 모수들이 경제적인 상황에 따라 정말로 달라지는지 통계적으로 검증할 수 있게 된다. 모수들을 추정하는 과정의 결과물로 매 시점에 경제가 각 국면에 있는 확률도 구할 수 있을 것이다.

국면전환 확률 변동성 모형들을 추정할 때 주가지수 KOSPI 200은 로그변환을 해 사용되며, 주가지수의 즉각적 (instantaneous) 변동성을 나타내는 두 번째 변수는 관측이 되지 않는다. 그래서 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)이 Hull

그림 3: VKOSPI의 일별 변화 (2009년 4월 13일 - 2018년 7월 11일)



주: 그림 3에는 2009년 4월 13일부터 2018년 7월 11일 까지 VKOSPI의 일별 변화의 시계열 자료를 그림 3에 그렸다.

and White (1987)의 아이디어를 이용해<sup>1</sup>, 관측이 가능하지 않은 변동성 변수의 대리변수 (proxy)를 내재적 변동성을 이용해 구한 방식에 따라 KOSPI 200의 즉각적인 변동성의 대리변수를 계산해 추정에 이용한다. 이 대리변수를 적분된 변동성 대리변수 (integrated volatility proxy: IV)라 한다. 위험중립 측도 (risk neutral measure)에서 즉각적 변동성 변수  $V_t$ 의 추세 (drift)가, 우리가 고려하는 모든 모형들에서 그렇듯이,  $a + bV_t$  ( $a$ 와  $b$ 는 상수) 와 같이  $V_t$ 의 1차 함수 형태인 경우에는 적분된 변동성 대리변수  $IV_t$ 는 다음의 식으로 계산된다:

$$IV_t = \frac{b \cdot \tau \cdot V_t^{imp} + a \cdot \tau}{\exp(b \cdot \tau) - 1} - \frac{a}{b}, \quad (1)$$

여기에서  $V_t^{imp}$ 는 만기까지의 시간이  $\tau$ 로 짧은 등가격 옵션 (at the money option)의 내재적 분산 (implied variance)으로  $V_t^{imp} = (VKOSPI_t/100)^2$ 이다.

확률 변동성 모형의 추정은 두 단계로 이루어진다. 첫 번째로 식 (1)을 이용해 적분된 변동성 대리변수를 얻기위해 VKOSPI를 이용한 다음과 같은 단일 변수 CEV모형을 추정해야 한다.

$$dY_t = \kappa(\gamma - Y_t)dt + \sigma Y_t^\beta dW_t \quad (2)$$

이 모형을 추정할 때  $Y_t = (VKOSPI_t/100)^2$ 을 이용한다. 추정 결과 얻어진 모수들의 추정값들로부터  $a = \kappa\gamma$ 와  $b = -\kappa$ 를 구하고,  $V_t^{imp} = (VKOSPI_t/100)^2$

<sup>1</sup>Jones (2003)도 Hull and White (1987)을 이용해 관측이 가능하지 않은 즉각적 변동성 변수를 근사적으로 구했다.

표 1: VKOSPI를 이용한 CEV 모형의 추정결과와 IV 식

$\kappa$	$\gamma$	$\sigma$	$\beta$
4.87** (1.42)	0.030** (0.0043)	1.74** (0.040)	0.98** (0.0050)
$IV_t = -0.0069 + 1.2275 (VKOSPI_t/100)^2$			

주: 표 1에는 VKOSPI 일별 자료를 이용해 단일변수 CEV 모형의 모수들을 최우 추정법으로 추정한 값과 표준오차 (추정값 옆 괄호 속)가 정리돼있다. 추정값 옆의 별 두개는 1% 유의수준에서 통계적으로 유의하다는 것을 나타낸다. 추정 결과의 바로 아래 줄에는 이 표의 추정결과와 식 (1)을 이용해 유도한 적분된 변동성 대리변수를 구하는 식이 쓰여 있다.

로 놓은 후에 VKOSPI도출에 사용된 옵션들의 만기일까지의 달력상 시간이 30일 이고 이는 거래일 수로 22일 이므로  $\tau = 22/252$ 를 식 (1)에 대입해  $IV_t$ 를 구한다. 모형 (2)의 추정은 최우 추정법을 이용해 이루어졌다. 이를 위해서는 이 확산과정의 전이 확률밀도 함수를 알아야 하는데, 앞에서 설명한 바와 같이 이 모형에 대해서도 전이 확률밀도 함수는 알려져 있지 않다. 이런 경우, 이 모형은 단일변수 시간균질 확률과정이기때문에 Ait-Sahalia (2002)가 제안한 방법을 이용해 근사적인 전이 확률밀도 함수를 정확하고 구체적인 식으로도출해 사용할 수 있는데, 이 과정에서 모형 (2)의 변동성 함수  $\sigma V_t^\beta$ 의  $\beta$ 값에 따라 여러 경우로 나누어 근사적 전이 확률밀도 함수를 구해야 한다<sup>2</sup>. 그래서 우리는 Ait-Sahalia (2002)가 아닌 Ait-Sahalia (2008)에서 개발된 축소가능법 (reducible method)을 이용해 전이 확률밀도 함수를 근사적으로 구했다.

추정 결과와 적분된 변동성 대리변수를 구하는 식은 표 1에 정리되어 있다. 모형 (2)의 모든 모수들이 통계적으로 유의한 결과가 나왔으며 내재적 분산  $V_t^{imp}$ 의 장기적인 평균 수준  $\gamma = 0.030$ 도 적절해 보인다. 모수  $\kappa$ 는  $V_t^{imp}$ 이 장기적인 평균 수준으로 돌아오는 속도를 나타내는데, 이 경우 장기적인 평균으로 돌아올 때 까지 걸리는 시간의 반은  $252 \cdot \ln(2) / \kappa$ 로 35.87 거래일이다<sup>3</sup>. 마지막으로 모수  $\beta$ 는  $V_t^{imp}$ 의 변동성의  $V_t^{imp}$ 에 대한 탄력성을 나타내는 것으로 0.98이 추정값이다.

표 2에는 위에서 구한  $IV_t$ 를 포함해 본 연구에서 사용된 자료들의 기본적

<sup>2</sup>이에 대한 좀더 자세한 설명은 Ait-Sahalia (1999)에 되어 있다.

<sup>3</sup>장기적인 평균으로 돌아가는 과정이 장기적인 평균으로 돌아가기까지 걸리리라 예상되는 시간의 반을 반감기 (half life)라 한다. 확산과정  $X_t$ 의 경우 추세함수가  $\kappa(X_t - \gamma)$ 와 같이  $X_t$ 의 선형함수면 반감기는  $\ln(2) / \kappa$ 인데 우리는 일별 자료를 사용하므로 이 경우 반감기의 일수는  $252 \cdot \ln(2) / \kappa$ 로 계산된다.

표 2: 기초 통계량

	min	max	mean	std.dev	skewness	kurtosis	corr
KOSPI 200	167.24	338.83	255.86	31.15	0.29	0.72	
VKOSPI	9.72	50.11	17.20	5.92	1.80	3.96	-0.67
ln(KOSPI 200)	5.12	5.83	5.54	0.12	-0.23	1.09	
IV	0.0047	0.30	0.034	0.033	2.97	11.36	-0.61

주: 2009년 4월 13일에서 2018년 7월 11일 까지의 일별 KOSPI 200, VKOSPI, ln(KOSPI 200), 그리고 적분된 변동성 대리변수의 기초 통계량이 표 2에 정리되어 있다. 여기에서 왜도는  $\mu_3/\sigma^3$ 이고 첨도는, 초과 첨도값인  $\mu_4/\sigma^4 - 3$ 로 각각 표준 정규분포와 비교해 상대적으로 분포가 얼마나 비대칭적인지 그리고 분포의 꼬리가 얼마나 두터운지에 대한 표준화된 값들이다. 확률변수  $X_i$ 에 대해  $\mu_i = E[(X_i - \mu)^i]$ 이고  $\sigma^2 = E[(X_i - \mu)^2]$ 이다. KOSPI 200의 일별 변화와 VKOSPI의 일별 변화 사이의 표본 상관관계수 그리고 log(KOSPI 200)의 일별 변화와 IV의 일별 변화의 표본 상관관계수가 마지막 열의 위부터 써 있다.

인 통계량 값들이 요약되어 있다. 이 논문에서 사용된 일별 자료의 관측치는 모두 2,413개이며 확률 변동성 모형들을 추정할 때 로그를 취해서 사용하는 KOSPI 200에 로그를 취한 것과 그러지 않은 것, IV와 이를 구하기 위해 이용된 VKOSPI 네 가지 자료에 대한 최소, 최대, 평균, 표준편차, 왜도 (skewness), 초과 첨도 (excess kurtosis) 값이 제시되어 있다. 표 2의 마지막 열에는 위부터 KOSPI 200의 일별 변화와 VKOSPI의 일별 변화 사이의 표본 상관관계수, 그리고 ln(KOSPI 200)의 일별 변화와 IV의 일별 변화 사이의 표본 상관관계수가 계산되어 있다. 이 값들에서도 확인할 수 있듯이 한국의 주식 시장에도 지렛대 효과 (leverage effect)가 있음을 알 수 있다. 물론 이는 자료들을 이용한 표본 상관관계수의 값이고, 아래에서 볼 수 있듯이 확률 변동성 모형의 추정을 통해 이를 다시 확인할 수 있다.

### 3. 국면전환 연속시간 확률 변동성 모형

이 논문에서는 모두 세 가지 종류의 국면전환 확률 변동성 모형들에 KOSPI 200 그리고 VKOSPI를 이용해 구한 IV 일별 자료를 적용해 모형들을 추정한다. 국면전환 확률 변동성 모형을 설명하기에 앞서 먼저 확률 변동 모형들에 대해 살펴보자. 첫 번째로, Heston (1993)의 확률 변동성 모형에서는 위험중립 측도 (risk-neutral measure)  $Q$ 하에서, 자산가격  $S_t$ 와 이의 국지적 변동성 (local

variance)  $V_t$ 가 다음과 같은 2변수 확산과정을 따른다.

$$d \begin{pmatrix} S_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r-d)S_t \\ \kappa'(\gamma - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t}S_t & \rho\sqrt{V_t}S_t \\ 0 & \sigma\sqrt{V_t} \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^Q \\ W_{2t}^Q \end{pmatrix}, \quad (3)$$

여기에서  $W_{1t}^Q$ 와  $W_{2t}^Q$ 는 서로 독립적인 브라운운동 과정들이다. 그리고  $V_t$ 는 Feller (1952)의 제곱근 과정을 따르고 변동성  $V_t$ 가 양의 값을 갖기 위해서는 Feller조건  $2\kappa'\gamma \geq \sigma^2$ 을 만족해야한다. 모수  $\gamma$ 는 변동성  $V_t$ 의 장기적 평균 수준을,  $\kappa'$ 는 변동성이  $\gamma$ 수준으로 돌아오는 속도를 그리고  $\sigma\sqrt{V_t}$ 는 변동성의 변동성을 나타낸다. 모수  $r$ 은 무위험 이자율이고  $d$ 는 배당률이다. 모수  $\rho$ 는 자산가격  $S_t$ 의 변화와 변동성 변수  $V_t$ 의 변화 사이의 상관 계수를 나타내는데 주가의 움직임의 성질들 중 잘 알려진 지렛대 효과가 있는 경우  $\rho$ 가 음의 값을 가지게 된다.

위의 확산과정을 로그 자산 가격  $s_t = \ln S_t$ 과  $V_t$ 로 다시 쓰면 이또의 보조정리 (Ito's lemma)를 이용해 식 (3)을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r-d-\frac{1}{2}V_t \\ \kappa'(\gamma - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t} & \rho\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma\sqrt{V_t} \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^Q \\ W_{2t}^Q \end{pmatrix}, \quad (4)$$

주식가격과 변동성의 위험에 대한 시장 가격들을 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)에서와 같이  $[\lambda_1\sqrt{(1-\rho^2)V_t}, \lambda_2\sqrt{V_t}]^T$ 로 놓으면 물리적인 측도 (physical measure)  $P$ 하에서  $(s_t, V_t)$ 는

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r-d+bV_t \\ \kappa(\gamma - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t} & \rho\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma\sqrt{V_t} \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}, \quad (5)$$

를 따른다. 이 때  $b = \lambda_1(1-\rho^2) + \lambda_2\rho - \frac{1}{2}$ ,  $\kappa = \kappa' - \lambda_2\sigma$ , 그리고  $\gamma = \left(\frac{\kappa'}{\kappa' - \lambda_2\sigma}\right)\gamma'$ 이다. 데이터를 이용해 실증 분석을 할 때는 물리적인 측도 하에서의 모형의 모수들을 추정한다. 위험 중립적 측도 하에서의 모수들을 구할 때는 위의 물리적 측도와 위험 중립적 측도의 모수들 사이의 관계를 이용해 계산할 수 있다.

그런데 모수들  $\kappa, \gamma, \sigma, \rho, r-d$  그리고  $\lambda_1$ 은 식별이 가능하지만  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 은 함께 식별할 수 없는 문제가 있다. 그래서 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)을 따라  $\lambda_2$ 를 0이라 가정한다. 그러면 위의 모형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r-d + [\lambda_1(1-\rho^2) - \frac{1}{2}]V_t \\ \kappa(\gamma - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t} & \rho\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma\sqrt{V_t} \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}.$$

(6)

그래서 우리가 추정해야할 모수들은  $\kappa, \gamma, \sigma, \rho, r-d$  그리고  $\lambda_1$ 이다.

비슷한 과정을 거치면 우리가 고려하는 두 번째의 확률 변동성 모형인 GARCH 확률 변동성 모형은 물리적측도  $P$ 하에서

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r-d+bV_t \\ \kappa(\gamma-V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t} & \rho\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma V_t \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix} \quad (7)$$

이다. GARCH 모형에서  $V_t$ 가 0이라는 경계 값이 되지 않고 항상 양의 값이 되기위한 조건은  $\kappa\gamma \geq 0$ 이다.

그리고 Heston 모형과 GARCH 모형을 모두 포함하는 더 일반적인 모형인 CEV 모형도 비슷한 방식으로 아래와 같이 도출할 수 있다.

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r-d+bV_t \\ \kappa(\gamma-V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)V_t} & \rho\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma V_t^\beta \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}. \quad (8)$$

위에 제시된 세 가지 모형들을 보면 알 수 있듯이 CEV 모형에서  $\beta = 1/2$ 인 경우 Heston모형이 되고,  $\beta = 1$ 이면 GARCH모형이 된다. 옵션 가격의 유일함 (uniqueness)을 위해서는  $1/2 \leq \beta \leq 1$ 을 만족해야 한다.

본 논문의 핵심 목표는 위에서 살펴본 확률 변동성 모형들의 모수들이 사회, 경제적 상황에 따라 다른 값을 가질 수 있는 국면전환 확률적 변동성 모형을 실제 데이터를 이용해 추정하고 국면전환 모형이 실제 데이터를 얼마나 더 잘 설명할 수 있는지 알아보는 것이다. Heston 확률 변동성 모형과 국면전환을 합한 국면전환 Heston모형은 다음과 같다.

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r-d)_{i_t} + [\lambda_{1i_t} (1-\rho_{i_t}^2) - \frac{1}{2}] V_t \\ \kappa_{i_t} (\gamma_{i_t} - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{(1-\rho_{i_t}^2)V_t} & \rho_{i_t}\sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma_{i_t}\sqrt{V_t} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}.$$

여기에서 국면을 나타내는 지수  $i_t$ 는 경제 상황에 따라 다른 값을 가질 수 있으며 따라서 데이터의 국면전환 행태를 설명할 수 있다. 이 연구에서는  $i_t$ 가 두 가지 다른 값  $L$ 과  $H$ 를 갖는 경우를 고려한다. 두 가지를 넘는 경우로도 쉽게 일반화가 가능하기는 하지만 이때는 추정해야할 모수들의 수가 더 많아지게 된다.

이와 비슷하게 GARCH 확률 변동성 모형과 CEV 확률 변동성 모형에 국면전환을 결합하면 모수들이 국면에 따라 다른 값을 갖게 되는 국면전환 모형

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r-d)_{i_t} + [\lambda_{1i_t} (1 - \rho_{i_t}^2) - \frac{1}{2}] V_t \\ \kappa_{i_t} (\gamma_{i_t} - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{(1 - \rho_{i_t}^2)} V_t & \rho_{i_t} \sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma_{i_t} V_t \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}$$

과

$$d \begin{pmatrix} s_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r-d)_{i_t} + [\lambda_{1i_t} (1 - \rho_{i_t}^2) - \frac{1}{2}] V_t \\ \kappa_{i_t} (\gamma_{i_t} - V_t) \end{bmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{(1 - \rho_{i_t}^2)} V_t & \rho_{i_t} \sqrt{V_t} \\ 0 & \sigma_{i_t} V_t^{\beta_{i_t}} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_{1t}^P \\ W_{2t}^P \end{pmatrix}.$$

를 각각 얻을 수 있다.

두 가지 다른 값을 갖는 국면지수  $i_t$ 는 연속시간 1차 마르코프 연쇄를 따른다. 국면지수의 변화를 결정하는 무한소 행렬은

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{LL} & \pi_{HL} \\ \pi_{LH} & \pi_{HH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_{LH} & \pi_{HL} \\ \pi_{LH} & -\pi_{HL} \end{pmatrix},$$

이고 여기에서 강도 모수 (intensity parameter)  $\pi_{ij}$ ,  $i, j = L, H$ 는  $i_t$ 가 국면을 전환하는 확률의 비율을 나타내며  $\pi_{ij} > 0$ ,  $i \neq j$ 이다.

실증분석에서는 일별 데이터를 사용할 예정인데, 이때 하루에 국면 전환이 많아야 한 번 있다고 가정을 하면 전이행렬  $P^\Delta$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P^\Delta = \frac{1}{\pi_{LH} + \pi_{HL}} \begin{pmatrix} \pi_{HL} + \pi_{LH} e^{-\Delta(\pi_{LH} + \pi_{HL})} & \pi_{HL} (1 - e^{-\Delta(\pi_{LH} + \pi_{HL})}) \\ \pi_{LH} (1 - e^{-\Delta(\pi_{LH} + \pi_{HL})}) & \pi_{LH} + \pi_{HL} e^{-\Delta(\pi_{LH} + \pi_{HL})} \end{pmatrix} \quad (9)$$

그리고 무조건적 확률들은  $(\frac{\pi_{HL}}{\pi_{LH} + \pi_{HL}}, \frac{\pi_{LH}}{\pi_{LH} + \pi_{HL}})$ 다. 여기에서  $\Delta$ 는 시계열 데이터 사이의 시간 간격이다. 이들을 재모수화 하면 전이행렬  $P$ 와 무조건적 확률들은 각각

$$P = \begin{pmatrix} p_{LL} & p_{HL} \\ p_{LH} & p_{HH} \end{pmatrix} \quad \text{그리고} \quad \left( \frac{1 - p_{HH}}{2 - p_{LL} - p_{HH}}, \frac{1 - p_{LL}}{2 - p_{LL} - p_{HH}} \right). \quad (10)$$

로 쓸 수 있다.

국면 변수  $i_t$ 의 전이 확률들은 다음과 같이 상태변수들에 의존할 수도 있다.

$$\begin{aligned} p_{LL} &= P(R_t = L | R_{t-\Delta} = L) = F(c_L + d_L s_{t-\Delta} + e_L V_{t-\Delta}) \\ p_{LH} &= P(R_t = H | R_{t-\Delta} = L) = 1 - F(c_L + d_L s_{t-\Delta} + e_L V_{t-\Delta}) \\ p_{HH} &= P(R_t = H | R_{t-\Delta} = H) = F(c_H + d_H s_{t-\Delta} + e_H V_{t-\Delta}) \\ p_{HL} &= P(R_t = L | R_{t-\Delta} = H) = 1 - F(c_H + d_H s_{t-\Delta} + e_H V_{t-\Delta}). \end{aligned}$$

기존의 연구들에서는  $F(x)$ 를 위해 로지스틱 함수나 누적 표준 정규분포 함수를 사용했다. Diebold et al. (1994)와 Dai et al. (2007) 등에서는 로지스틱 함수,  $F(x) = e^x / (1 + e^x)$ 를 이용했고 Gray (1996)는 누적 표준 정규분포 함수를 이용했다. Choi (2009)에서는 두 함수를 모두 사용했고 두 경우 모두에서 비슷한 결과를 얻었다. 본 연구에서는 로지스틱 함수를 사용한다.

이 논문에서 추정할 모형들을 요약해보면, 단일 국면 모형은 R1을, 국면 전환 모형 중에서 전이확률이 상수인 것은 R2를 그리고 전이확률이 주가와 변동성 변수에 의존하는 경우는 R2TVTP를 각 모형의 뒤에 붙여, Heston 모형은 Heston-R1, Heston-R2 그리고 Heston-R2TVTP의 세 가지, GARCH 모형은 GARCH-R1, GARCH-R2 그리고 GARCH-R2TVTP의 세 가지, CEV 모형은 CEV-R1, CEV-R2, 그리고 CEV-R2TVTP의 세 가지 모형들을 고려하고 있다.

우도함수의 값을 구하기 위해, 첫 번째 관측치가 예를 들어  $H$ 국면에 있을 확률을 알아야 하는데<sup>4</sup>, 이를 위에서 구한 무조건적 확률을 이용하거나 모수  $p$ 를 추가할 수도 있는데, 두 경우 비슷한 추정 결과를 얻기에 (Choi (2009)) 그리고 전이 확률이 시간에 따라 변하는 TVTP모형의 경우에는 초기상태의 확률을 위한 모수를 추가해야 하므로, 모수  $p$ 를 추가해서 모든 국면전환 모형들의 우도함수를 구했다. 그러므로 국면전환 Heston, GARCH 확률 변동형 모형에서 추정할 모수들은  $\theta = (\kappa_L, \gamma_L, \sigma_L, \rho_L, r_L, \lambda_{1L}, \kappa_H, \gamma_H, \sigma_H, \rho_H, r_H, \lambda_{1H}, p_{LL}, p_{HH}, p)$ 가 되고 CEV 확률 변동성 모형은 여기에  $\beta_L$ 과  $\beta_H$ 을 추가하면 된다. 전이확률이  $s_t$ 와  $V_t$ 에 의존하며 변하는 TVTP 모형은  $p_{LL}$ 와  $p_{HH}$ 대신  $c_L, c_H, d_L, d_H, e_L$ , 그리고  $e_H$ 를 추정하게 된다.

#### 4. 근사적 전이확률밀도함수를 이용한 최우도 추정법

추정량의 효율성의 측면에서 볼 때 가능하다면, 최적의 방법인 최우 추정법을 이용해 확산과정의 모수들을 추정하는 것이 좋다. 본 연구에서는 최우

<sup>4</sup>첫 번째 관측치가  $H$ 국면에 있을 확률을  $p$ 라고 하면,  $L$ 국면에 있을 확률은  $1 - p$ 다.

추정법을 이용해 모수들을 추정할 것이다.  $X_t = (s_t, V_t)$ 라 놓자. 비록 확률 변동성 모형이 연속시간 모형이기는 하지만 우리가 관찰할 수 있는 데이터는 이산적이고 각 시점  $t = i\Delta, i = 0, 1, 2, \dots, n$ 에만 관측된다. 여기에서  $\Delta$ 는 시계열 데이터 사이의 시간 간격이다. 그러면 베이스의 규칙에 따라 데이터의 결합 확률밀도 함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & p(x_{n\Delta}, x_{(n-1)\Delta}, \dots, x_{\Delta}, x_0; \theta) \\ &= p(x_{n\Delta} | x_{(n-1)\Delta}, \dots, x_{\Delta}, x_0; \theta) \times p(x_{(n-1)\Delta} | x_{(n-2)\Delta}, \dots, x_{\Delta}, x_0; \theta) \times \\ & \dots \times p(x_{2\Delta} | x_{\Delta}, x_0; \theta) \times p(x_{\Delta} | x_0; \theta) \times p(x_0; \theta). \end{aligned}$$

초기 값을 무시하면, 로그 우도함수는

$$l_n(\theta) \equiv \sum_{i=1}^n \ln [p(x_{i\Delta} | I_{(i-1)\Delta}; \theta)], \quad (11)$$

로 쓸 수 있고 여기에서  $I_t = \{X_s | s \leq t\}$ 는  $t$  시점까지의 데이터를 포함하는 정보 집합이다.

최우 추정법을 이용하기 위한 조건부 우도함수  $p(x_{i\Delta} | I_{(i-1)\Delta}; \theta)$ 의 값은 해밀턴 (Hamilton (1989)) 알고리즘을 이용해 구할 수 있다. 이 알고리즘을 설명하기 편하도록 Hamilton (1994)에서와 같이 새로운 변수  $i_t^*$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} i_{t-\Delta} = L \text{ 이고 } i_t = L \text{ 이면 } i_t^* &= 1 \\ i_{t-\Delta} = L \text{ 이고 } i_t = H \text{ 이면 } i_t^* &= 2 \\ i_{t-\Delta} = H \text{ 이고 } i_t = L \text{ 이면 } i_t^* &= 3 \\ i_{t-\Delta} = H \text{ 이고 } i_t = H \text{ 이면 } i_t^* &= 4 \end{aligned}$$

그러면  $i_t^*$ 는 네 가지 다른 값을 가질 수 있고 전이행렬이

$$P^* = \begin{pmatrix} p_{LL} & 0 & p_{LL} & 0 \\ p_{LH} & 0 & p_{LH} & 0 \\ 0 & p_{HL} & 0 & p_{HL} \\ 0 & p_{HH} & 0 & p_{HH} \end{pmatrix}.$$

인 연속시간 마르코프 연쇄를 따른다.

해밀턴 알고리즘을 이용할 때  $t + \Delta$  단계에서는  $t$  단계에서 얻은

$$\hat{\xi}_{t+\Delta|t} = \begin{pmatrix} P(i_{t+\Delta}^* = 1|I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 2|I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 3|I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 4|I_t; \theta) \end{pmatrix} \quad \text{그리고} \quad \eta_{t+\Delta} = \begin{pmatrix} p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 1, I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 2, I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 3, I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 4, I_t; \theta) \end{pmatrix}$$

를 사용하게 된다. 여기에서  $\hat{\xi}_{t+\Delta|t}$ 의 원소들은  $I_t$ 와 모수  $\theta$ 를 이용한  $i_{t+\Delta}^*$ 의 국면에 대한 추정확률이다. 그리고  $\eta_{t+\Delta}$ 의 원소들은  $i_{t+\Delta}^*$ ,  $I_t$  그리고 모두  $\theta$ 가 주어졌을 때  $X_{t+\Delta}$ 의 조건부 확률밀도함수다. 예를 들면, 확산과정  $X_t$ 의 마르코비안 성질과  $X_{t+\Delta}$ 의 조건부 밀도함수는  $i_t$ 에 따라 결정된다는 가정을 이용하면 (Dai et al. (2007)),  $p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^*, I_t; \theta) = p(x_{t+\Delta}|x_t, i_t = L; \theta)$ . 그리고  $X_{t+\Delta}$ 와  $i_{t+\Delta}^*$ 의 결합 우도는  $\hat{\xi}_{t+\Delta|t}$ 과  $\eta_{t+\Delta}$ 의 원소들 끼리 곱함으로써 얻어진다. 즉

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t+\Delta|t} \odot \eta_{t+\Delta} &= \begin{pmatrix} P(i_{t+\Delta}^* = 1|I_t; \theta) p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 1, I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 2|I_t; \theta) p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 2, I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 3|I_t; \theta) p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 3, I_t; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 4|I_t; \theta) p(x_{t+\Delta}|i_{t+\Delta}^* = 4, I_t; \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(x_{t+\Delta}, i_{t+\Delta}^* = 1|I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}, i_{t+\Delta}^* = 2|I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}, i_{t+\Delta}^* = 3|I_t; \theta) \\ p(x_{t+\Delta}, i_{t+\Delta}^* = 4|I_t; \theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

그리고  $\hat{\xi}_{t+\Delta|t} \odot \eta_{t+\Delta}$ 의 원소들의  $i_{t+\Delta}^*$ 에 대한 합을 구하면 우리가 필요한 조건부 확률밀도 함수  $p(x_{t+\Delta}|I_t; \theta)$ 를 구할 수 있다. 또한  $i_{t+\Delta}^*$ 값에 대한 최적의 추론 값  $\hat{\xi}_{t+\Delta|t+\Delta}$ 는

$$\hat{\xi}_{t+\Delta|t+\Delta} = \frac{\hat{\xi}_{t+\Delta|t} \odot \eta_{t+\Delta}}{p(x_{t+\Delta}|I_t; \theta)} = \begin{pmatrix} P(i_{t+\Delta}^* = 1|I_{t+\Delta}; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 2|I_{t+\Delta}; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 3|I_{t+\Delta}; \theta) \\ P(i_{t+\Delta}^* = 4|I_{t+\Delta}; \theta) \end{pmatrix} \quad (12)$$

로 구할 수 있다. 다음 단계에서 사용되는  $\hat{\xi}_{t+2\Delta|t+\Delta}$ 는  $P^* \hat{\xi}_{t+\Delta|t+\Delta}$ 로 구해진다.

국면지수  $i_t$ 의 초기 상태 확률을 위해 추가적인 모수  $P(i_1 = L) = p$ 를 도입하면  $i_t^*$ 의 초기 확률은  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (p_{LL}p, p_{LHP}, p_{HL}(1-p), p_{HH}(1-p))$ 가 된다. 이 값들을 이용해 위의 과정들을 반복하면서 조건부 확률밀도 함수의

값  $p(x_{t+\Delta}|I_t; \theta)$ 을 구하면 전체 데이터의 로그 우도 값을 구해 최우 추정법을 적용할 수 있다.

위에서 본 바와 같이 해밀턴 알고리즘을 이용해 우도를 구한 다음에 최우 추정법을 이용해 국면전환 확률 변동성 모형을 추정하기 위해서는 확률 변동성 확산과정의 전이 확률밀도 (transition probability density) 함수를 알아야 한다. 불행히도 아주 일부의 예를 제외하고는 거의 대부분의 확산과정들의 경우에 참 전이 확률밀도 함수가 알려져 있지 않다. 우리가 고려하고 있는 세 가지의 확률 변동성 모형들에 대한 전이 확률밀도 함수들도 알려져 있지 않다. 이 경우 연구자들은 전이 확률밀도 함수가 만족하는 편미분 방정식을 수치적으로 풀거나 (Lo (1988)) 몬테카를로 적분 방법을 이용해 (Pedersen (1995) 그리고 Brandt and Santa-Clara (2002)) 또는 2항식이나 3항식 트리를 이용해 (Jensen and Poulsen (2002)) 전이 확률밀도 함수를 구했다. 그렇지만 이 방법들은 전이 확률밀도 함수를 구체적 공식으로 구하는 것이 아니다.

Ait-Sahalia (2008)은 일반적인 시간 균질 다변수 확산과정의 로그 전이 확률밀도 함수를 근사시켜 구체적인 식으로 구하는 방법을 알아냈다. 우리는 먼저 이 방법을 이용해 로그 전이 확률밀도 함수를 구할 것이다. 이 방법에 대해 간단히 살펴보자. 다변수 확산과정의 전이 확률밀도 함수를 근사적으로 그렇지만 구체적 공식으로 구하는 방법은 확산과정을 변환해 확산과정의 변동성 행렬을 단위행렬로 만들 수 있는지 여부에 따라 각각 축소가능한 (reducible) 방법과 축소가능하지 않은 (irreducible) 방법으로 나눌 수 있다 (Choi (2013)). 어떤 확산과정의 축소가능 여부를 판단할 수 있는 필요충분 조건은 Ait-Sahalia (2008)이나 Choi (2013)에 제시되어 있다. 우리가 고려하는 확산과정들은 모두 축소가능하지 않기 때문에 축소가능하지 않은 방법을 이용해야 한다.

확률 변동성 모형은 2변수 시간 균질 확산과정으로  $X_t = (X_{1t}, X_{2t})'$ 라 놓고 2변수인 경우에 축소가능하지 않은 방법에 대해 간단히 살펴보면 다음과 같다. 축소가능하지 않은 확산과정의 로그 전이 확률밀도 함수는 축소 가능한 확산과정의 경우에 구한 다음의 로그 전이 확률밀도 함수의  $K$ 차 근사식을 이용해 구한다.

$$l_X^{(K)}(\Delta, x|x_0; \theta) \quad (13)$$

$$= -\ln(2\pi\Delta) - D_v(x; \theta) + \frac{C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\Delta} + \sum_{k=0}^K C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta) \frac{\Delta^k}{k!},$$

여기에서  $D_v(x; \theta) = \frac{1}{2} \ln(\text{Det}[v(x; \theta)])$ 인데  $v(x; \theta) = \sigma(x; \theta) \sigma(x; \theta)^T$ 이며  $\sigma(x; \theta)^T$ 는  $\sigma(x; \theta)$ 의 전치 (transpose)행렬이고  $\text{Det}[v(x; \theta)]$ 는  $v(x; \theta)$ 의 행렬식(determinant)이다. 축소가능한 경우에는 각 계수들  $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ ,  $k =$

$-1, 0, 1, 2, \dots, K$ 을 구할 수 있다.

그렇지만 축소가능하지 않은 경우에는 위와 같은 근사식을 찾을 수 없기 때문에 확산과정이 축소가능하지 않을 때에도 로그 전이 확률밀도 함수의 형태가 축소 가능한 경우와 같다고 상정을 한다. 그리고 이 식을 참 로그 전이 확률밀도 함수가 만족하는 편미분식 방정식에 집어 대입해  $\Delta$ 에 대해 같은 차수의 항들끼리 비교를 하면  $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 가 만족하는 편미분 방정식들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$-2C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta) = \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_j} \quad (14)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_j} = G_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta)$$

그리고  $k \geq 1$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta) - \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_j} \\ = G_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta), \end{aligned}$$

이고 여기에서

$$\begin{aligned} G_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta) \\ = 1 - \sum_{i=1}^2 \mu_i(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v_{ij}(x; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_j} \\ - \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_j} \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial^2 C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_X^{(1)}(\Delta, x|x_0; \theta) \\ = - \sum_{i=1}^2 \mu_i(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v_{ij}(x; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial^2 C_X^{(0)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mu_i(x; \theta)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_{ij}(x; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \sum_{i=1}^2 \mu_i(x; \theta) \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v_{ij}(x; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_j} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \left[ \frac{\partial^2 D_v(x; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_j} \right].
\end{aligned}$$

이때  $k \geq 2$ 일 때는

$$\begin{aligned}
& G_X^{(k)}(\Delta, x | x_0; \theta) \\
& = - \sum_{i=1}^2 \mu_i(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v_{ij}(x; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& - \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial D_v(x; \theta)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial^2 C_X^{(k-1)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \frac{\partial C_X^{(0)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x; \theta) \left[ \sum_{h=1}^{k-2} \binom{k-1}{h} \frac{\partial C_X^{(h)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial C_X^{(k-1-h)}(\Delta, x | x_0; \theta)}{\partial x_j} \right].
\end{aligned}$$

로 여기에서  $G_X^{(k)}(\Delta, x | x_0; \theta)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 은 모두 확산과정의 추세 (drift)나 변동성 (volatility) 항들 그리고 전 단계에서 구해진 계수들  $C_X^{(h)}(\Delta, x | x_0; \theta)$ ,  $h = -1, 0, 1, 2, \dots, k-1$ 에만 의존한다.

축소 가능한 경우에는 각 계수들에 대한 위의 편미분 방정식을 풀어내 구할 수 있지만 축소 가능하지 않은 확산과정은 그렇게 할 수가 없다. 그렇지만  $C_X^{(k)}(\Delta, x | x_0; \theta)$ ,  $k = -1, 0, 1, 2, \dots, K$ 들의 테일러급수를 위의 편미분 방정식에 대입한 다음에 같은 차수들의 항끼리 일치시켜 테일러급수의 계수들을 구하는 방법으로  $C_X^{(k)}(\Delta, x | x_0; \theta)$ 를  $j_k$ 차수 까지 구한 급수 전개(series expansion)를 구하고 이를  $C_X^{(k, j_k)}(\Delta, x | x_0; \theta)$ 라 한다. 이때 주의할 점은  $C_X^{(k, j_k)}(\Delta, x | x_0; \theta)$

의 높은 차수의 계수는 일반적으로 낮은 차수의 계수들에 의존하기 때문에 테일러급수의 계수를 구할 때는 낮은 차수의 항부터 높은 차수 항의 순서대로 구해야 한다. 그리고  $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 와  $G_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 는  $C_X^{(h)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ ,  $h = -1, 0, 1, 2, \dots, k-1$ 에 의존하기 때문에  $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 를 구할 때  $k$ 값이 작은 것부터 큰 순서대로 구해야 한다.

이렇게 구한  $C_X^{(k, j_k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 들을 이용해 로그 전이 확률밀도 함수를 구체적으로 근사시킬 수 있다. 그런데 우리가 고려하는 모형들을 추정하기 위해 해밀턴 알고리즘을 이용해 로그 우도함수를 구할 때 필요한 것은 로그 우도함수가 아니라 우도함수다. Choi (2015b)는 근사적 로그 전이 확률밀도 함수를 이용해 근사적 전이 확률밀도 함수를 다음과 같이 구할 수 있음을 밝혔다.

$$p_X^{(K)}(\Delta, x|x_0; \theta) = \Delta^{-1} \exp \left[ \frac{C_X^{(-1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\Delta} \right] (2\pi)^{-1} \left| \det[v(x; \theta)] \right|^{-1/2} \times \exp \left[ C_X^{(0)}(\Delta, x|x_0; \theta) \right] \sum_{k=0}^K c_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta) \frac{\Delta^k}{k!}. \quad (15)$$

여기에서  $c_X^{(k)}(t, x|t_0, x_0)$ ,  $k \geq 0$ 는

$$c_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta) = \sum \frac{k!}{s_1! s_2! \dots s_k!} \left[ \frac{C_X^{(1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{1!} \right]^{s_1} \left[ \frac{C_X^{(2)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{2!} \right]^{s_2} \dots \left[ \frac{C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{k!} \right]^{s_k},$$

와 같이 근사적 로그 전이 확률밀도 함수의 계수들로 나타낼 수 있다. 그리고 여기에서 합은  $k = s_1 + 2s_2 + \dots + ks_k$ 을 만족하는 모든  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ 들에 대한 것이다.

축소가능하지 않은 경우에는  $C_X^{(k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 를  $C_X^{(k, j_k)}(\Delta, x|x_0; \theta)$ 로 바꿔 쓸 수 있고 근사적 오차가  $O_p(\Delta^{K+1})$ 인 전이 확률밀도 함수를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{p}_X^{(K)}(\Delta, x|x_0; \theta) = \Delta^{-1} \exp \left[ \frac{C_X^{(j_0, -1)}(\Delta, x|x_0; \theta)}{\Delta} \right] (2\pi)^{-1} \left| \det[v(x; \theta)] \right|^{-1/2} \times \exp \left[ C_X^{(j_0, 0)}(\Delta, x|x_0; \theta) \right] \sum_{k=0}^K c_X^{(k, j_k)}(\Delta, x|x_0; \theta) \frac{\Delta^k}{k!}. \quad (16)$$

이 결과와 해밀턴 알고리즘을 이용해, 우도 함수의 값을 구하고 최우 추정법으로 모수들을 추정했다.

## 5. 추정 결과와 논의

이번 절에서는 앞에서 살펴 본 세 가지 다른 확률변동성 모형들의 단일국면 그리고 국면전환 모형들을 추정한 결과를 설명하고 이에 대한 논의를 한다. Heston, GARCH, 그리고 CEV 확률 변동성 모형들 각각에 대해 세 가지 다른 모형들을 추정한 결과, 각 모형들에서 단일국면 모형보다 국면전환 모형들의 로그 우도값이 더 큼을 확인할 수 있다. 통상적인 우도비 (likelihood ratio) 검정 통계량을 이용해 단일국면 모형의 귀무가설을 국면전환 모형의 대립가설에 대해 통계적으로 검정을 하면 단일국면 모형의 귀무가설을 쉽게 기각할 수 있기는 하지만, 이 경우에 통상적인 우도비 검정 통계량을 사용할 수 없다는 사실은 잘 알려져 있다. 그 이유는 단일국면의 귀무가설하에서 두 번째 국면과 관련된 모수들의 식별이 가능하지 않기 때문이다. Davis (1987), Hansen (1992), 그리고 Cho and White (2007) 등은 이러한 문제를 해결하기 위한 검정통계량을 제안하기는 했지만, 이들의 방법론은 특정한 모형들에만 적용할 수 있고, 이 논문에서 고려하는 모형들에 대해서는 사용할 수 없다. 이와 같은 문제가 있음에도 불구하고 Hamilton and Susmel (1996)과 Gray (1996) 등은 통상적인 우도비 검정 통계량값을 계산해 국면전환 모형이 단일국면 모형보다 데이터를 더 잘 설명한다고 주장한다. 전이확률이 상수인 R2모형과 시간에 따라 달라지는 R2TVTP모형은 통상적인 우도비 검정 통계량을 이용해 비교해도 문제가 없다. 아래에서 구체적인 수치로 보여주겠지만, 세 가지 모든 경우들에 대해, R2모형의 귀무가설을 R2TVTP모형의 대립가설에 대해 통계적으로 검정하면  $p$ 값이 매우 작아 R2 모형은 기각된다. 또한 모형들의 비교를 위해 많이 사용되는 정보기준 AIC와 BIC<sup>5</sup>를 계산해보면, 단일국면 모형보다는 R2 모형이, R2 모형보다는 R2TVTP 모형이 더 작은 값을 갖고, 전체 9개의 모형들의 정보기준 값들을 비교하면 CEV-R2TVTP 모형의 정보기준 값이 가장 작아 KOSPI 200 데이터를 모형화 할 때 CEV-R2TVTP 모형이 가장 좋은 모형으로 선택됨을 알 수 있다.

CEV 모형은 Heston 모형과 GARCH 모형을 포함하기에 단일국면 모형과 국면전환 모형 각각의 경우에 우도비 검정 통계량을 이용해 CEV 모형과 다른 모형들을 비교할 수 있다. 먼저 단일국면 모형들의 경우에는 CEV-R1 모형이 Heston-R1 모형으로 수렴하므로 CEV-R1 모형 가정을 GARCH-R1의 가정에

<sup>5</sup>정보기준 AIC와 BIC는  $AIC = -\frac{2}{n} \ln L(x, \hat{\theta}_{ML}) + 2\frac{k}{n}$  그리고  $BIC = -\frac{2}{n} \ln L(x, \hat{\theta}_{ML}) + \ln(n)\frac{k}{n}$ 의 두 식을 이용해 계산된다. 여기에서  $n$ 은 전체 관측치의 수에서 1을 뺀 것이고  $k$ 는 모형의 모수들의 수이며  $L(x, \hat{\theta}_{ML})$ 는 최우 추정값에서의 우도 값이다. 여러 모형들 중에서 정보기준의 값이 제일 작은 것이 가장 좋은 모형으로 선택된다.

대해 우도비 통계량을 이용해 검정을 하면  $p$ 값이 0에 가까운 매우 작은 값이므로 단일국면 GARCH 모형이 통계적으로 일반적인 유의 수준에서 기각됨을 알 수 있다. 국면전환 모형의 경우 CEV-R2TVTP 모형의 대립가설에 대해 다른 다섯 가지의 국면전환 모형들을 귀무가설로 우도비 검정을 하면 Heston-R2, Heston-R2TVTP, GARCH-R2, GARCH-R2TVTP, 그리고 CEV-R2 모형들 모든 경우에 대해  $p$ 값이 0에 가까운 아주 작은 값이 나와 CEV-R2TVTP모형이 통계적으로 더 선호됨을 확인할 수 있다. 여기에서 흥미로운 점 하나는, CEV-R1 모형의 경우에는 Choi (2018)에서와 마찬가지로  $\beta$ 가 1/2로 수렴해 Heston 모형과 같은 추정 결과를 얻었다. 그렇지만 CEV-R1모형에 국면전환을 허용하면 두 국면에서  $\beta$ 가 1/2과 1사이의 서로 다른 추정값을 갖는 것을 확인할 수 있다. 이는 국면전환 모형이 단일국면 모형보다 KOSPI 200 자료를 더 잘 설명한다는 것을 고려하면 Heston-R1 모형보다 더 일반적인 CEV-R1모형이 단일 국면의 제약 때문에 Heston-R1 모형과 차별적으로 KOSPI 200 자료를 설명하지 못하는 한계가 있음을 뜻한다. 정보기준 값을 이용해 9개의 모형들을 비교해도 CEV-R2TVTP 모형이 가장 선호된다는 결론을 내릴 수 있다.

구체적으로 모수들의 추정 결과들에 대해 설명하기에 앞서 전반적인 추정 결과를 살펴보자. 모든 모형들에서 주가와 관련된 모수들 보다는 변동성 변수와 레버리지 효과와 관련된 모수들 그리고 전이확률과 관련된 일부의 모수들이 통계적으로 유의하게 추정됐다. 국면전환 모형의 경우에는 두 국면을 각각  $L$ 과  $H$ 로 부르는데 장기적인 평균 값  $\gamma$ , 장기적인 평균으로 돌아오는 속도를 나타내는  $\kappa$ ,  $V_t$ 의 변동성이 국면전환 CEV 모형과 Heston 모형에서는 일관되게  $H$ 국면에서 더 크게 추정됐다. 또한 이들 두 모형에서는 국면 변수  $i_t$ 가  $H$ 에서 다음 기에도 같은 국면  $H$ 에 머무를 확률이 크게 나오고 국면변수  $i_t$ 가  $L$ 에서  $L$ 로 전이될 확률은 작게 추정되어 국면  $H$ 에 있는 경우에 같은 국면  $H$ 에 머무르는 경향이 더 강하게 나타났다. 전이확률이 주가와 변동성에 의존하는 경우에는 국면  $H$ 의 모수들이 통계적으로 유의하게 나왔고  $V_t$ 보다는  $s_t$ 에 따라 달라진다는 증거를 찾았다. 이와 반면, 레버리지 효과의 강도를 나타내는  $\rho$ 는 국면  $L$ 에서 더 크게 추정됐고 아래에서 좀 더 자세히 논의되겠지만 세 모형들 중에서 통계적인 증거에 따르면 가장 선호도가 낮은 GARCH 모형에서는 국면에 따라 뒤섞인 결과가 나왔다.

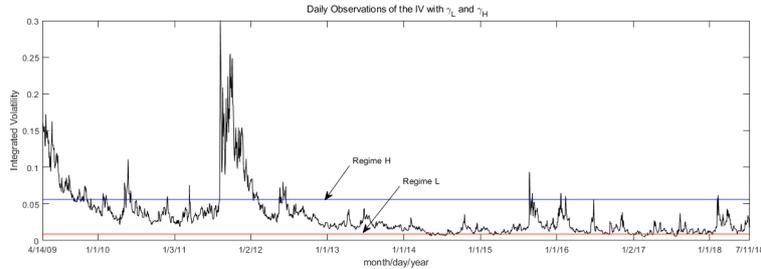
위의 세 모형들을 비교한 결과에 따라 가장 선호되는 CEV-R2TVTP 모형을 중심으로 다른 모형들의 추정결과와 비교하면서 결과를 설명하면 다음과 같다. 표 3, 4 그리고 5에는 각각 CEV 모형들, Heston 모형들, 그리고 GARCH 모형들의 추정 결과들이 정리되어 있다. 먼저 표 3의 두 번째 열에는 CEV-R1 모형의 추정결과가 있는데, 모수  $\rho$ 의 추정값이 통계적으로 매우 유의한  $-0.60$

표 3: CEV 모형의 최우 추정 결과

모형 국면	CEV-R1	CEV-R2	CEV-R2TVTP
	단일국면 모형	국면전환 모형	
$P(R_1 = L)$	-	$p$	$p$
$p_{ij}, i, j = L, H$	-	$p_{ii}$	$\frac{\exp(c_i + d_i s_t + c_i I V_t)}{1 + \exp(c_i + d_i s_t + c_i I V_t)}$
로그우도	18052.29	19317.51	19412.34
모수	최우 추정값 (표준 오차)		
$\rho_L$	-0.60** (0.00049)	-0.73** (0.0063)	-0.74** (0.0031)
$\rho_H$	-	-0.58** (0.0032)	-0.59** (0.0033)
$\kappa_L$	6.40** (0.023)	1.98** (0.22)	1.98** (0.16)
$\kappa_H$	-	4.71** (0.17)	4.71** (0.18)
$\gamma_L$	0.031 (0.066)	0.0099 (1.67)	0.0087 (1.27)
$\gamma_H$	-	0.050 (0.57)	0.056 (0.64)
$\sigma_L$	0.47** (0.0023)	0.33** (0.016)	0.32** (0.012)
$\sigma_H$	-	0.59** (0.019)	0.64** (0.022)
$\beta_L$	0.50** (0.0016)	0.68** (0.016)	0.68** (0.013)
$\beta_H$	-	0.55** (0.011)	0.55** (0.011)
$(r-d)_L$	0.00001 (0.55)	0.0011 (4.13)	0.0011 (3.28)
$(r-d)_H$	-	0.0042 (3.39)	0.0042 (3.61)
$\lambda_L$	3.64** (0.056)	3.88** (0.54)	3.88** (0.46)
$\lambda_H$	-	3.55** (0.32)	3.55** (0.33)
$\rho_{LL}$	-	0.14** (0.032)	-
$\rho_{HH}$	-	0.87** (0.029)	-
$c_L$	-	-	-2.00 (8.61)
$c_H$	-	-	2.13 (1.22)
$d_L$	-	-	-0.049 (2.79)
$d_H$	-	-	-0.015** (0.0037)
$e_L$	-	-	0.020 (12.38)
$e_H$	-	-	0.020 (0.025)
$p$	-	0.50 (0.52)	0.50 (0.33)
AIC	-14.9629	-16.0037	-16.0791
BIC	-14.9461	-15.9629	-16.0287

주: 표 3에는 세 가지 다른 CEV 모형들의 모수들의 추정 결과들이 정리되었다. 먼저 다섯 번째 행에는 각 모형의 최대 우도값이 나타나 있다. 두 번째 열에는 단일국면 모형 CEV-R1, 세 번째 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 상수인 CEV-R2 모형 그리고 마지막 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 주가와 변동성 변수에 의존하는 CEV-R2TVTP 모형의 추정 결과들이 있다. 추정값 옆의 괄호 속에는 표준오차가 있고 추정값 옆의 별표 두 개는 1% 유의수준에서 통계적으로 유의하다는 것을 나타낸다. 마지막 두 행에는 각 모형의 정보기준 AIC와 BIC의 값들이 있다.

그림 4: 적분된 변동성 대리변수  $IV_t$ 와 CEV-R2TVTP 모형의  $\hat{\gamma}_L$ 과  $\hat{\gamma}_H$



주: 관측되지 않는 변동성 변수 대신에 사용된 적분된 변동성 대리변수  $IV_t$ 의 시계열 그래프와 CEV-R2TVTP 모형에서 추정된 최우 추정값들  $\hat{\gamma}_L$ 과  $\hat{\gamma}_H$ 이 그림 4에 나타나 있다.

으로 레버리지 효과가 비교적 강하게 있는 결과를 얻었는데 이 값은 표 2에 있는  $\log(\text{KOSPI 200})$ 와  $IV$  사이의 표본 상관관계수,  $-0.61$ 과 비슷한 값이며 다른 모든 모형들에서도 강도는 다르지만 모두 통계적으로 유의한 레버리지 효과가 있다는 결과를 얻었다. 흥미롭게도 CEV-R2 모형과 CEV-R2TVTP 모형에서 모두  $L$  국면에서의 레버리지 효과가  $H$ 국면 보다 더 강하다는 통계적으로 유의한 결과를 얻었다. 두 모형에서 비슷한  $\rho_L$ 과  $\rho_H$ 의 추정값을 얻었는데 두 국면 모두에서 CEV-R2TVTP 모형의 레버리지 효과가 약간 더 컸다. Heston 모형에서도 비슷한 레버리지 효과의 결과를 얻었는데, 이 모형에서의 레버리지 효과가 좀 더 강한 것으로 나타났다. 이와 반면, GARCH 모형에서는 두 국면에서의 레버리지 효과가 비슷하게 나타났고  $\rho_H$ 가  $\rho_L$ 보다 약간 더 컸다.

다음으로 적분된 변동성 대리변수,  $IV_t$ 를 이용한 변수  $V_t$ 가 두 국면에서 서로 다른 장기적인 평균 수준으로 돌아오는 경향이 있는 것으로 추정되긴 했지만, 어떤 모형에서도 장기적인 평균 수준을 나타내는 모수  $\gamma$ 는 통계적으로 유의하지는 않았다. 이는 그림 4에서 볼 수 있듯이 추정에 사용된  $IV_t$ 의 그래프와 CEV-R2TVTP 모형에서 추정된  $\hat{\gamma}_L$ 과  $\hat{\gamma}_H$ 를 비교해 보면,  $IV_t$ 의 장기적인 평균 수준이 변동성이 큰 경우와 작은 경우에 다른 값으로 존재하는 것 같아 보이는 하나, 이를 특정한 값으로 정확하게 추정하기에는 어려워 보인다. 아마도 좀 더 많은 데이터가 있으면 장기적인 평균 수준의 모수들을 좀 더 정확하게 추정할 수 있으리라 생각된다. 통계적으로 유의하지는 않으나 단일국면 모형 CEV-R1에서는 대략  $\hat{\gamma}_L$ 과  $\hat{\gamma}_H$ 의 평균 수준인  $0.031$ 을 얻었고 Heston 모형과 GARCH 모형들에서도 CEV 모형과 비슷한 결과를 얻었다.

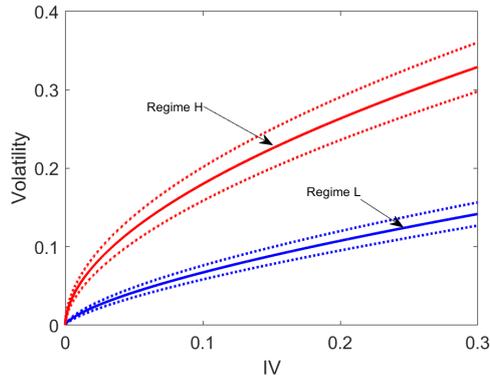
그렇지만, 장기적인 평균 수준으로 회귀하는 속도를 나타내는 모수  $\kappa$ 는 모

표 4: Heston 모형의 최우 추정 결과

모형 국면	Heston-R1 단일국면 모형	Heston-R2 국면전환 모형	Heston-R2TVTP
$P(R_1 = L)$	-	$p$	$p$
$p_{ii}, i, j = L, H$	-	$p_{ii}$	$\frac{\exp(c_i + d_i s_i + c_i IV_i)}{1 + \exp(c_i + d_i s_i + c_i IV_i)}$
로그우도	18052.27	19234.4455	19354.41
모수	최우 추정값 (표준 오차)		
$\rho_L$	-0.60** (0.00049)	-0.81** (0.0013)	-0.78** (0.0010)
$\rho_H$	-	-0.70** (0.00037)	-0.66** (0.00049)
$\kappa_L$	6.39** (0.027)	5.63** (0.039)	6.42** (0.019)
$\kappa_H$	-	6.59** (0.036)	7.40** (0.035)
$\gamma_L$	0.031 (0.073)	0.013 (0.11)	0.019 (0.050)
$\gamma_H$	-	0.065 (0.096)	0.057 (0.088)
$\sigma_L$	0.47** (0.00031)	0.19** (0.00052)	0.16** (0.00027)
$\sigma_H$	-	0.57** (0.00042)	0.55** (0.00046)
$(r - d)_L$	0.00049 (0.96)	0.012 (1.98)	0.00046 (1.68)
$(r - d)_H$	-	0.010 (1.07)	0.00040 (1.07)
$\lambda_L$	3.40** (0.091)	2.05** (0.36)	2.38** (0.27)
$\lambda_H$	-	1.70** (0.12)	1.38** (0.11)
$\rho_{LL}$	-	0.00040** (0.000042)	--
$\rho_{HH}$	-	0.9687** (0.0023)	--
$c_L$	-	-	-1.50 (1.38)
$c_H$	-	-	1.60** (0.23)
$d_L$	-	-	-0.068** (0.0042)
$d_H$	-	-	-0.017** (0.00073)
$e_L$	-	-	0.023 (0.028)
$e_H$	-	-	0.028** (0.0040)
$p$	-	0.50 (0.50)	0.50 (0.50)
AIC	-14.9637	-15.9382	-16.0327
BIC	-14.9493	-15.9070	-15.9871

주: 표 4에는 세 가지 다른 Heston 모형들의 모수들의 추정 결과들이 정리되어 있다. 먼저 다섯 번째 행에는 각 모형의 최대 우도값이 나타나 있다. 두 번째 열에는 단일국면 모형 Heston-R1, 세 번째 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 상수인 Heston-R2 모형 그리고 마지막 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 주가와 변동성 변수에 의존하는 Heston-R2TVTP 모형의 추정 결과들이 있다. 추정값 옆의 괄호 속에는 표준오차가 있고 추정값 옆의 별표 두 개는 1% 유의수준에서 통계적으로 유의하다는 것을 나타낸다. 마지막 두 행에는 각 모형의 정보기준 AIC와 BIC의 값들이 있다.

그림 5: CEV-R2TVTP 모형의 두 변동성 함수들과 95% 신뢰 영역



주: 그림 5는 CEV-R2TVTP 모형에서 추정된 모수들  $\sigma_L$ ,  $\sigma_H$ ,  $\beta_L$ , 그리고  $\beta_H$ 를 이용해  $V_t$ 의 변동성 함수를  $IV_t$ 가 관측된 모든 값의 영역에 대해서 그리고 이 함수들의 95% 신뢰 영역도 함께 그렸다.

든 모형에서 통계적으로 유의하게 추정됐다. 이는  $V_t$ 가 어떤 특정한 장기적인 평균 수준으로 회귀하는지 정확히 알 수 없어도 장기적인 평균 수준으로 돌아가려는 경향은 존재한다는 것을 보여준다. CEV-R2TVTP 모형에서  $\hat{\kappa}_L = 1.98$  그리고  $\hat{\kappa}_H = 4.71$ 인데 이는 앞에서 살펴봤듯이 국면  $L$ 과  $H$ 에서  $V_t$ 가 장기적인 평균으로 돌아올 때 까지 걸리는 시간의 반이 각각 88.21 거래일과 37.09 거래일로  $H$ 국면에서  $V_t$ 가 장기적인 평균 수준으로 두 배 이상 빨리 돌아가려는 경향이 있다는 것을 뜻한다.  $\kappa$  값은 CEV-R2 모형에서도 같게 나왔고 CEV-R1 모형에서는 좀 더 큰 추정 값을 얻었다. Heston-R2TVTP모형에서는  $\hat{\kappa}_L = 6.42$  그리고  $\hat{\kappa}_H = 7.40$  그리고 GARCH-R2TVTP모형에서는  $\hat{\kappa}_L = 7.74$  그리고  $\hat{\kappa}_H = 10.39$ 로 CEV 경우보다 두 국면 모두에서 다소 큰 값을 얻었고 이는 R2 모형들에서도 비슷하다.

다음으로  $V_t$ 의 변동성 함수와 관련된 모수  $\sigma$ 와  $\beta$ 는 모든 모형에서 통계적으로 아주 유의하게 추정됐다. CEV-R2TVTP 모형에서  $\hat{\sigma}_L = 0.32$ ,  $\hat{\beta}_L = 0.68$ ,  $\hat{\sigma}_H = 0.64$ , 그리고  $\hat{\beta}_H = 0.55$ 를 얻었는데,  $\beta$ 는  $V_t$ 의 변동성의  $V_t$ 에 대한 탄력성으로, 국면  $L$ 의 탄력성이 국면  $H$ 보다 더 큼을 알 수 있다. 그런데  $\hat{\sigma}_H$ 는  $\hat{\sigma}_L$ 보다 커, 어느 국면의 변동성이 더 큰지는 관측된  $IV_t$  값들에 대해 변동성 함수를 그려봐야 알 수 있다. 그림 5에는 CEV-R2TVTP 모형의 추정 값들과

분산을 이용해 두 국면의 변동성 함수와 95% 신뢰 영역을 그렸다. 그림을 보면 국면  $H$ 에서의 변동성이 국면  $L$ 보다, 관측된  $IV_t$  값들 모두에 대해, 더 크고 95% 신뢰 영역이 서로 겹치지 않아 두 국면의 변동성 함수가 5% 유의 수준에서 통계적으로 다름을 알 수 있다. 국면전환 Heston 모형에서도  $H$  국면에서의 변동성이 국면  $L$ 에서 보다 더 컸는데 국면전환 GARCH 모형에서는 이와 반대의 결과가 나왔다.

주식 가격의 위험에 대한 시장가격과 관련된 모수  $\lambda$ 는 모든 모형들에서 일관되게 통계적으로 유의하게 추정됐다. CEV-R2TVTP 모형에서  $\hat{\lambda}_L = 3.88$  그리고  $\hat{\lambda}_H = 3.55$ 으로 Heston 모형이나 GARCH 모형에서 얻은 추정값들 보다 모두 크다. 그리고  $L$ 국면의 가격이  $H$ 국면의 가격보다 큰데 이는 Heston 모형에서도 마찬가지 이지만 GARCH 모형에서는 이와 반대의 결과를 얻었다. 무위험 이자율에서 배당률을 뺀  $r - d$ 는 어느 모형에서도 통계적으로 유의하지 않은 추정 값들이 나왔다.

국면 변수  $i_t$ 의 전이확률의 추정 결과를 시간에 따라 변하지 않는 R2 모형과 주가와 변동성 변수에 의존하는 R2TVTP 모형으로 나누어 보면, 먼저 CEV-R2 모형에서는  $\hat{p}_{HH} = 0.87$ 이고  $\hat{p}_{LL} = 0.14$ 로 국면  $H$ 는 다음 시점에도 같은 국면에 머무르려는 경향이 강하지만 국면  $L$ 은 다음 시점에 국면  $H$ 로 바뀔 확률이 더 높다. 이는 Heston-R2 모형에서도 비슷한 결과를 얻었는데 GARCH-R2 모형에서는  $p_{LL}$ 이 0.95로 그리고  $p_{HH}$ 가 0.052 추정되어 다른 두 모형들과는 반대의 결과를 얻었다. CEV-R2TVTP 모형에서는 전이확률 함수에서 국면  $H$ 에서 주가의 계수인  $d_H$ 만 통계적으로 유의하게 추정됐다. Heston-R2TVTP 모형에서는  $c_H, d_H, d_L, e_H$ 가 모두 통계적으로 유의한 값이 나왔고 GARCH-R2TVTP 모형에서는 이와 반대로  $c_L, d_L, d_H, e_L$ 가 통계적으로 유의했다. 앞에서 논의한대로 R2TVTP 모형이 R2 모형 가설을 통계적으로 기각한다는 면에서, 정보기준의 값이 R2TVTP 모형이 더 작다는 것, 그리고 CEV-R2TVTP 모형이 가장 선호된다는 측면에서 보면 국면변수가 시간에 따라 변하며 변동성 변수 보다는 주가에 의존한다고 결론을 내릴 수 있다. 그리고 국면전환 모형의 우도 함수 값을 계산하기 위해 첫 관측 시점에서  $H$ 국면에 있을 확률이 필요해 도입한 모수  $p$ 는 어느 모형에서도 유의하게 나오지 않았다. 이는 초기 상태의 확률은 그리 중요하지 않다는 것을 뜻한다.

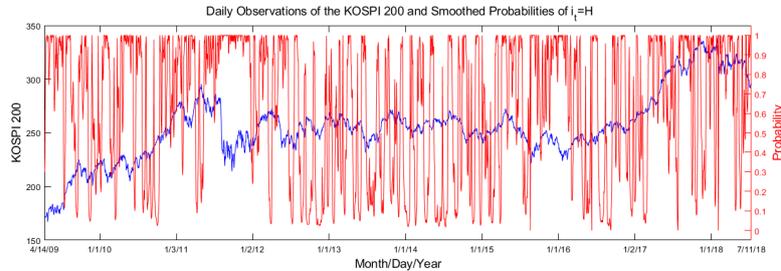
앞서 해밀턴 알고리즘을 설명할 때 언급했듯이, 국면전환 모형을 최우 추정 방법으로 추정하기 위해 우도함수의 값을 계산하는 과정에서 데이터의 각 시점에서 경제가 국면  $H$ 에 있을 확률을 계산할 수 있다<sup>6</sup>. 이 확률을 각 시점까지의 정보만을 이용해 구한 확률을 필터된 (filtered) 확률이라 하고 모든 데이

<sup>6</sup>국면  $L$ 에 있을 확률은 1에서 국면  $H$ 에 있을 확률을 빼면 된다.

표 5: GARCH 모형의 최우 추정 결과

모형 국면	GARCH-R1 단일국면 모형	GARCH-R2 국면전환 모형	GARCH-R2TVTP
$P(R_1 = L)$	-	$p$	$p$
$p_{ii}, i, j = L, H$	-	$p_{ii}$	$\frac{\exp(c_i + d_i s_i + c_i I V_i)}{1 + \exp(c_i + d_i s_i + c_i I V_i)}$
로그우도	17816.99	19117.39	19127.05
모수	최우 추정값 (표준 오차)		
$\rho_L$	-0.83**(0.000045)	-0.65**(0.00011)	-0.65**(0.0000)
$\rho_H$	-	-0.71**(0.0021)	-0.71**(0.000014)
$\kappa_L$	11.44**(0.64)	7.74**(0.59)	7.74**(0.71)
$\kappa_H$	-	10.40**(0.92)	10.39**(0.33)
$\gamma_L$	0.012 (0.74)	0.013 (0.93)	0.013 (1.16)
$\gamma_H$	-	0.078 (1.20)	0.088 (0.45)
$\sigma_L$	0.76**(0.00011)	0.92**(0.00020)	0.92**(0.0000)
$\sigma_H$	-	0.39**(0.0045)	0.38**(0.00092)
$(r-d)_L$	0.029 (2.63)	0.010 (1.27)	0.010 (1.56)
$(r-d)_H$	-	0.022 (3.70)	0.022 (1.79)
$\lambda_L$	4.97**(0.57)	1.50** (0.12)	1.50** (0.13)
$\lambda_H$	-	2.03** (0.51)	2.03** (0.23)
$p_{LL}$	-	0.95**(0.0053)	-
$p_{HH}$	-	0.052**(0.0062)	-
$c_L$	-	-	2.00** (0.21)
$c_H$	-	-	-1.95 (2.91)
$d_L$	-	-	-0.017**(0.00062)
$d_H$	-	-	-0.068**(0.0082)
$e_L$	-	-	0.028**(0.0049)
$e_H$	-	-	0.023 (0.086)
$p$	-	0.50 (0.53)	0.50 (0.60)
AIC	-14.7686	-15.8395	-15.8442
BIC	-14.7543	-15.8035	-15.7986

주: 표 5에는 세 가지 다른 GARCH 모형들의 모수들의 추정 결과들이 정리되었다. 먼저 다섯 번째 행에는 각 모형의 최대 우도값이 나타나 있다. 두 번째 열에는 단일국면 모형 GARCH-R1, 세 번째 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 상수인 GARCH-R2 모형 그리고 마지막 열에는 국면전환하고 국면변수의 전이확률이 주가와 변동성 변수에 의존하는 GARCH-R2TVTP 모형의 추정 결과들이 있다. 추정값 옆의 괄호 속에는 표준오차가 있고 추정값 옆의 별표 두 개는 1% 유의수준에서 통계적으로 유의하다는 것을 나타낸다. 마지막 두 행에는 각 모형의 정보기준 AIC와 BIC의 값들이 있다.

그림 6: 국면  $H$ 의 평활확률과 KOSPI 200

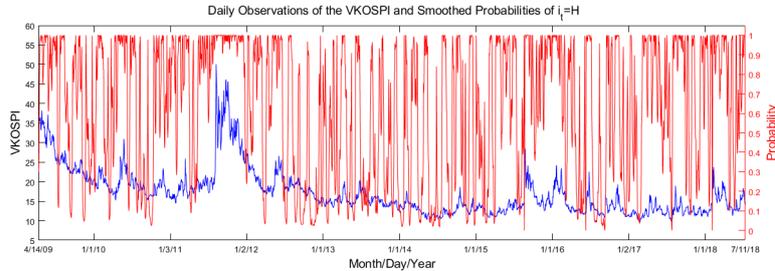
주: 그림 6은 CEV-R2TVTP 모형의 추정 과정에서 계산된 각 시점이 국면  $H$ 에 있을 평활확률과 KOSPI 200의 시계열 자료를 보여준다.

터를 이용해 구한 확률을 평활 (smoothed) 확률이라고 한다. 그림 6, 7, 그리고 8은 9개의 모형들 중에서 가장 선호되는 CEV-R2TVTP 모형에서 구한 국면 변수  $i_t$ 가 국면  $H$ 에 있을 평활확률과 KOSPI 200, VKOSPI 그리고  $IV_t$ 의 일별 변화를 같이 각각 그래프로 그린 것이다<sup>7</sup>. 평활확률로 추정된 국면  $H$ 의 확률을 보면 관측자료의 전 기간에 걸쳐 다른 국면이 번갈아가며 바뀌기는 하지만 국면  $H$ 에 있었던 기간이 더 길다. 그리고 주가 보다는 주가의 변동성 지수가 절대적 그리고 주변 시기들 보다 상대적으로 높았던 시기와 적분된 변동성 대리변수의 변화가 상대적으로 심했던 시기들이 국면  $H$ 에 있었을 확률들이 높게 계산됐다. 이는 모수들의 추정 결과에서  $V_t$ 와 관련된 모수들이 통계적으로 유의하게 추정된 결과와도 맥을 같이 하는 것으로 보인다.

2009년 4월 13일부터 2018년 7월 11일 까지의 데이터 기간 동안 한국의 주식시장에 어떤 사건들이 있었는지 살펴보면, 우선 데이터의 처음인 2009년 초반은 2008년 말에 미국의 서브프라임 모기지로 인해 시작된 세계 금융위기와 밀접한 관련이 있어 보이고, 이후에 지금까지 관측된 변동성 지수가 가장 높았던 시기인 2011년은 중동 민주화사태, 일본 대지진, 포르투갈 구제금융 신청, 스탠더드앤amp;푸어스(S&P)의 미국 신용등급 강등, 김정일 사망, 유로존 국채 금리 상승 등 대내외적으로 여러 사건들이 일어나면서 국내 주가의 낙폭이 크게 등락이 반복되며 VKOSPI도 크게 증가하는 시기였다. 특히 2011년 8월 6일 미국 신용등급의 강등으로 KOSPI 200이 폭락하고 VKOSPI가 급등했다.

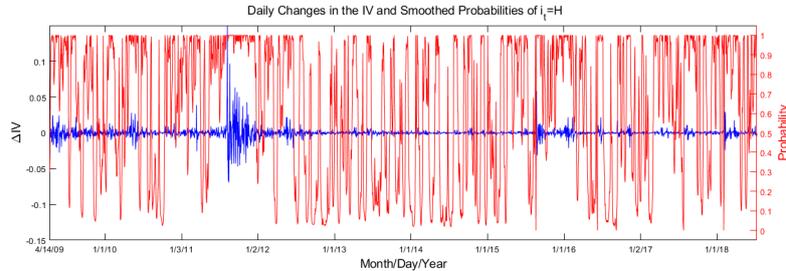
<sup>7</sup>그림 7에서 모형들 추정에 사용된 적분된 변동성 대리변수  $IV$ 를 사용할 수도 있으나 앞서 봤듯이  $IV$ 는 VKOSPI를 제공한 것의 선형변환이므로  $IV$ 를 사용해도 비슷한 그림을 얻을 수 있다.

그림 7: 국면  $H$ 의 평활확률과 VKOSPI



주: 그림 7은 CEV-R2TVTP 모형의 추정 과정에서 계산된 각 시점이 국면  $H$ 에 있을 평활확률과 VKOSPI의 시계열 자료를 보여준다.

2010년 5월 그리스 구제금융으로 본격화된 유럽 재정위기는 계속 지속되어 2012년에는 유로존 9개국 신용등급 강등, 그리스 및 스페인의 구제금융 신청, 포르투갈 국가부도위기 직면 등의 사건이 있었다. 북한과 관련한 여러 사건들 또한 국내 주식 시장에 많은 영향을 준 것으로 보인다.이들을 좀 더 살펴 보면 2009년 5월 25일 2차 핵실험, 2010년 3월 26일 천안함 사건, 2010년 11월 23일 연평도 포격 사태, 2011년 12월 19일 김정일 사망, 2013년 2월 12일 3차 핵실험, 2015년 8월 20일 서부전선 포격, 2016년 1월 6일 4차 핵실험, 2016년 2월 10일 개성공단 중단, 2016년 6월 22일 북한의 중거리 탄도 미사일 발사 실험, 2016년 9월 9일 5차 핵실험, 2017년 9월 3일 6차 핵실험, 2018년 4월 27일과 5월 26일의 제 1차, 2차 남북정상회담, 그리고 2018년 6월 12일의 1차 북미정상회담 등이 있다. 이 외에도 2015년 5월 20일 첫 번째 감염자가 발생한 메르스 사태, 2016년 6월 24일 브렉시트 국민투표에서 EU 탈퇴가 가결된 사건, 2016년 하반기 박근혜 게이트 사건과 삼성 갤럭시노트 7 폭발 그리고 11월 9일 미국 트럼프 대통령의 당선, 2017년 3월 10일 박근혜 대통령 파면 결정, 5월 9일 문재인 19대 대통령 당선, 2018년 들어 미국의 보호무역 정책과 미국 연방준비제도의 네 차례 기준금리 인상 등 남북, 대내외적 여러 사건들이 일어난 시기들의 대부분은 국면  $H$ 의 확률이 높게 추론된 기간들과 관련이 있어 보인다.

그림 8: 국면  $H$ 의 평활확률과  $IV$ 의 일별 변화

주: 그림 8은 CEV-R2TVTP 모형의 추정 과정에서 계산된 각 시점이 국면  $H$ 에 있을 평활확률과  $IV$ 의 일별 변화의 시계열 자료를 보여준다.

## 6. 결론

이 논문의 목적은 좀 더 일반적인 여러 종류의 국면전환 확률 변동성 모형들을 이용해 KOSPI 200 일별 자료의 움직임을 설명하고 어떤 모형이 가장 좋은지 알아보기 위한 것이다. 최근에 Choi (2018)는 단일국면 확률 변동성 모형에 KOSPI 200과 S&P 500 일별자료를 적용해 한국과 미국의 주식 시장을 비교했다. 그런데 하나의 모형 보다는 경제 상황에 따라 다른 모형들이 데이터의 움직임을 결정한다고 보는 것이 좀 더 합리적이기에 이 논문에서는 이를 허용하는 국면전환 확률 변동성 모형에 KOSPI 200 일별 자료를 적용해 추정하고 과연 단일국면 모형 보다 국면 전환 모형이 자료의 움직임을 더 잘 설명하는지 조사했다.

KOSPI 200과 VKOSPI 일별 자료를 이용했는데, KOSPI 200 자료는 1990년 1월 3일부터 존재하지만 VKOSPI 자료가 2009년 4월 13일 부터 발표됐기 때문에 2009년 4월 13일부터 연구에 필요한 자료를 모았을 당시 이용 가능했던 모든 자료인 2018년 7월 11일 까지의 자료들을 이용했다. 이 연구에서는 단일국면 Heston, GARCH, 그리고 CEV 확률 변동성 모형과, 이들이 경제 상황에 따라 서로 다른 국면  $L$ 과  $H$ 에 따라 다른 모수 값들을 갖을 수 있도록 허용하는 국면전환 Heston, GARCH, 그리고 CEV 모형들을 고려했다. 국면 전환 모형은 국면을 결정하는 변수가 연속시간 1차 마르코프 연쇄를 따르는데 이 변수의 전이확률이 상수인 경우와 주가와 변동성 변수에 의존해 시간에 따라 변할 수 있는 두 가지 경우가 있다. 그러므로 각 모형에 대해 세 가지씩 모두 9개의 모형을 추정했다. KOSPI 200은 로그를 취하고 관측 가능하지 않은 변

동성 변수는 Ait-Sahalia and Kimmel (2007)의 방법에 따라 VKOSPI를 이용해 적분된 변동성 대리변수를 구해 모형들을 추정했다.

최우 추정법을 이용해 모형들을 추정하는데 우도 함수의 값은 해밀턴 알고리즘 (Hamilton (1989))으로 구한다. 그리고 이 과정에서 확률 변동성 모형의 전이 확률밀도 함수가 필요한데, 대부분의 확산과정들이 그렇듯이, 우리가 고려하는 확률 변동성 모형들의 전이 확률밀도 함수도 알려져 있지 않다. 그래서 Ait-Sahalia (2008)와 Choi (2015b)의 결과를 이용해 전이 확률밀도 함수를 근사적이고 구체적인 식으로 유도했다.

추정 결과 이 논문에서 고려한 모든 모형들을 포함하는 CEV-R2TVTP 모형이 KOSPI 200의 움직임을 가장 잘 설명한다는 결과를 얻었다. 대부분의 모수들이 보통의 통상적인 수준에서 통계적으로 유의하게 추정됐다. 두 국면 모두에서 주가 수익률과 변동성의 변화가 음의 상관 관계가 있다는 레버리지 효과를 확인할 수 있었고 국면  $L$ 에서  $H$ 보다 레버리지 효과가 더 크게 추정됐다. 그리고 국면  $H$ 가  $L$ 보다, 통계적으로 유의하지는 않았지만, 더 큰 변동성 변수의 장기적인 평균 값을 가졌고 변동성 변수가 장기적인 평균 수준으로 돌아오는 속도가 더 빨랐으며, 변동성 변수의 변동성이 더 컸다. 무위험 이자율에서 배당률을 뺀 모수는 어떤 모형에서도 통계적으로 유의하지 않았고 주가의 위험 가격은 모든 모형에서 통계적으로 유의하게 추정됐다.  $H$ 국면에서 다음 시점에 같은 국면에 있으려는 경향이 강한 반면에  $L$ 국면에서는  $H$ 국면으로 갈 확률이 더 높았고 전이 확률은 변동성 변수 보다는 주가에 의존해 시간에 따라 변했다. 각 시점에서  $H$ 국면에 있을 확률을 구했는데,  $H$ 국면의 확률이 높은 기간에는 한국의 주식 시장에 영향을 줄 수 있는 남북 관계나 대내외적으로 정치 경제적인 문제가 있는 경우가 많았다.

이 논문에서 확률 변동성 모형과 국면전환을 결합한 것은, 2요인 모형인 확률 변동성 모형에 국면 전환을 나타내는 세 번째 변수를 도입한 3요인 모형으로 볼 수 있다. 확률 변동성 모형에 점프를 추가해 점프 확률 변동성 모형을 이용하거나 세 번째 변수를 도입해 3요인 확산과정 모형을 이용해 KOSPI 200 자료의 움직임을 추정하는 것도 고려할 수 있다. 나중의 연구 과제로 이러한 모형들을 추정해 국면전환 확률과정 모형의 추정결과들과 비교해 보는 것도 의미가 있으리라 생각된다.

## 참고문헌

- AÏT-SAHALIA, Y. (1999): "Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions," *Journal of Finance*, 54, 1361-1395.
- AÏT-SAHALIA, Y. (2002): "Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach," *Econometrica*, 70(1), 223-262.
- AÏT-SAHALIA, Y. (2008): "Closed-Form Likelihood Expansions for Multivariate Diffusions," *Annals of Statistics*, 36(2), 906-937.
- AÏT-SAHALIA, Y., AND R. KIMMEL (2007): "Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models," *Journal of Financial Economics*, 83, 413-452.
- AÏT-SAHALIA, Y., AND A. LO (1998): "Nonparametric estimation of state-price-densities implicit in financial asset prices," *Journal of Finance*, 53, 499-547.
- BLACK, F., AND M. SCHOLES (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- BRANDT, M. W., AND S.-C. P. (2002): "Simulated Maximum Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to Exchange Rate Dynamics in Incomplete Markets," 63, 161-210.
- CHO, J. S., AND H. WHITE (2007): "Testing for Regime Switching," *Econometrica*, 75, 1671-1720.
- CHOI, H., AND S. HAN (2009): "Explanation of the VKOSPI and empirical analysis," *KRX Market*.
- CHOI, S. (2009): "Regime-Switching Univariate Diffusion Models of the Short-Term Interest Rate," *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 13(1), Article 4.
- CHOI, S. (2013): "Closed-Form Likelihood Expansions for Multivariate Time-Inhomogeneous Diffusions," *Journal of Econometrics*, 174(2), 45-65.

- CHOI, S. (2015a): “Approximate Transition Probability Density Function of a Multivariate Time-inhomogeneous Jump Diffusion Process in a Closed-Form Expression,” *Working paper*, University of Seoul.
- CHOI, S. (2015b): “Explicit Form of Approximate Transition Probability Density Functions of Diffusion Processes,” *Journal of Econometrics*, 187, 57-73.
- CHOI, S. (2018): “Comparison of the Korean and US Stock Markets Using Continuous-time Stochastic Volatility Models,” *KDI Journal of Economic Policy*, 40(4), 1-22.
- CHOI, S., AND D. YUAN (2018): “Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Stochastic Volatility Models with Regime Shifts,” *Working paper*, University of Seoul.
- DAI, Q., K. J. SINGLETON, AND W. YANG (2007): “Regime Shifts in a Dynamic Term Structure Model of U.S. Treasury Bond Yields,” *Review of Financial Studies*, 20(5), 1669-1706.
- DAVIS, R. B. (1987): “Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative,” *Biometrika*, 74, 33-43.
- DIEBOLD, F., J.-H. LEE, AND G. WEINBACH (1994): “Regime Switching with Time-Varying Transition Probabilities,” in C. Hargreaves, ed., *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, pp. 283-302, Oxford University Press. Oxford.
- DRIFFILL, J., T. KENC, M. SOLA, AND F. SPAGNOLO (2004): “An Empirical Examination of Term Structure Models with Regime Shifts,” *Discussion paper*, Centre for Economic Policy Research.
- DURHAM, G. B., AND Y.-H. PARK (2013): “Beyond Stochastic Volatility and Jumps in Returns and Volatility,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 31(1), 107-121.
- EGOROV, A. V., H. LI, AND Y. XU (2003): “Maximum Likelihood Estimation of Time Inhomogeneous Diffusions,” *Journal of Econometrics*, 114, 107-139.

- GRAY, S. F. (1996): "Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process," 42, 27-62.
- HAMILTON, J. D. (1989): "A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57(2), 357-384.
- HAMILTON, J. D. (1994): *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- HAMILTON, J. D., AND R. SUSMEL (1996): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," (64), 307-333.
- HANSEN, B. E. (1992): "The Likelihood Ratio Test Under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, 7, S61-S82.
- HESTON, S. L. (1993): "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- HULL, J., AND A. WHITE (1987): "The pricing of options on assets with stochastic volatilities," *Journal of Finance*, 42, 281-300.
- JENSEN, B., AND R. POULSEN (2002): "Transition Densities of Diffusion Processes: Numerical Comparison of Approximation Techniques," *Journal of Derivatives*, 9, 18-32.
- JONES, C. S. (2003): "The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets," *Journal of Econometrics*, 116, 181-224.
- LEWIS, A. (2000): *Option Valuation Under Stochastic Volatility*. Finance Press, Newport Beach.
- LIECHTY, J. C., AND G. O. ROBERTS (2001): "Markov Chain Monte Carlo Methods for Switching Diffusion Models," *Biometrika*, 88(2), 299-315.
- LO, A. W. (1988): "Maximum Likelihood Estimation of Generalized Ito Processes with Discretely Sampled Data," *Econometric Theory*, 4, 231-247.
- MERTON, R. C. (1973): "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.

- NAIK, V., AND M. H. LEE (1998): "Yield Curve Dynamics with Discrete Shifts in Economics Regimes: Theory and Estimation," *Working paper*, University of Saskatchewan.
- PEDERSEN, A. R. (1995): "A New Approach to Maximum-Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations Based on Discrete Observations," *Scandinavian Journal of Statistics*, 22, 55-71.
- STEIN, E., AND J. STEIN (1991): "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies*, 4, 727-752.
- STEIN, J. (1989): "Overreactions in the options market," *Journal of Finance*, 44, 1011-1023.
- YU, J. (2007): "Closed-Form Likelihood Approximation and Estimation of Jump-Diffusions with an Application to the Realignment Risk of the Chinese Yuan," *Journal of Econometrics*, 141, 1245-1280.